CALCULO MENTAL ULTRA-RAPIDO

POR JOSE CLOTET

$$\sqrt[3]{865321794}$$

2520386

$$\log 4,6804624 = ?$$

$$9^{m+1} = \sqrt{\frac{1}{a}}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\begin{array}{r} 821739 \\ \times\ 256408 \\ \hline 210700453512 \end{array}$$

$$\varphi = 6426\sqrt{6} \times \sqrt[3]{2}\ \sqrt{413^2 + 0{,}42636^2}$$

$$196\pi\sqrt{21}$$

DAS ESCOLAS DE ENGENHARIA E CIENCIAS ECONOMICAS DE BARCELONA - EX-DOCENTE DA UNIVERSIDADE DA MESMA CIDADE

...DES MATEMÁTICAS

Orlando de
Alvarenga Gaudio
Julho - 1936

CÁLCULO MENTAL ULTRA RÁPIDO

POR

JOSÉ CLOTET

Das Escolas de Engenharia e Ciências Econômicas de Barcelona
Ex-Docente da Universidade da mesma cidade

36.ª EDIÇÃO

Oficinas Gráficas da LIVRARIA DO GLOBO
Barcellos, Bertaso & Cia. — Pôrto Alegre
Filiais : Santa Maria e Pelotas

Os números governam o mundo.

Platão

A matemática é a rainha das ciências e a aritmética é a rainha das matemáticas.

Gauss

A matemática é a honra do espírito humano.

Leibnitz

Todos os exemplares dêste livro são numerados, e rubricados pelo autor cujos direitos de reprodução e adaptação já estão devidamente garantidos.

Exemplar Nº 1620

Exmo. Sr. General José Antônio Flores da Cunha.
Governador do Estado do Rio-Grande-do-Sul.

Todos os exempla... dos, rubricados pelo ... produção e adaptação ... tidos.

Exemplar ...

Exmo. Sr. General **José Antônio Flores da Cunha**,
Governador do Estado do Rio-Grande-do Sul.

PREFÁCIO

Várias edições obrigadas pela procura de nossos livros intitulados:

"O CALCULISTA MENTAL RELÂMPAGO" E
"MALABARISMOS MATEMÁTICOS"

foram impressas nos principais idiomas, entre os quais o Chinês e o Japonês.

Encontrando-nos agora no Brasil e perante a insistência com que o público requer a impressão do mais interessante dêles, na formosa e régia língua de Camões, entregamos à luz da publicidade êste livro denominado:

"CÁLCULO MENTAL ULTRA-RÁPIDO"

com exemplos fáceis e práticos, na espera de que chame a curiosidade dos interessados, os quais em qualquer momento, substituindo nossos métodos pelos que êles pretendam aplicar, encontrarão pela maneira simples, rápida e eficiente os resultados que lhes possam interessar.

Precisamente queremos frisar que não nos explicamos como alguns autores de extensos tratados de matemática; não dediquem êles mais espaço e atenção em consignar processos de cálculo abreviado, maximé quando expõem em suas obras, regras com grande luxo de detalhes e aglomerações de casos (seqüência dêles) que, se alguma vez podem ser aplicados, não justificam que outros métodos e processos de tão grande utilidade e interêsse na vida prática e quotidiana como é o cálculo rápido, possa ser relegado, preterido e superficialmente esboçado.

Assim sendo, êste livro contém uma variedade de aplicações de fórmulas para operar ràpidamente, e ùnicamente quando seja de absoluta necessidade, explicaremos e formularemos a análise necessária de demonstração dos resultados, pois precisamente acabamos de fazer referência a que os autores em geral dedicam-se a explicar, analisar e discutir hipóteses e regras sem preocupar-se em muitos casos de expor as aplicações práticas e rápidas que possam ter. Por outra parte, cremos que o leitor, perfeitamente versado e preparado nelas e em especial, àqueles a quem possam ser precisos para aplicá-los ou praticá-los desde que tenham vocação e gôsto pessoal para tais inquietudes espirituais; e isso significa cultura matemática, tudo o que nos induz a restringir ou a omitir a parte analítica para não fazer extensa e pesada esta obra.

Algumas vezes temos feito caso omisso da estrita linguagem de precisão verdadeiramente matemática, para que os recém iniciados ou os profanos possam compreender-nos com mais facilidade, tendo usado às vezes também de formas de espressão que

poderiam ser apontadas como inestéticas ou vulgares, se não fizessemos a observação do porque de tal motivo a nosso ver poderoso.

A missão que nos impusemos ao publicar nossas obras foi sempre de divulgação de regras, fórmulas e procedimentos singelos, rápidos e efetivos, que fôssem interessantes a quem quer que tivesse de operar com números e em qualquer classe de manifestação que a êles se referissem.

Esta foi sempre nossa norma e nela perseveraremos.

Se conseguirmos interessar o leitor e ser-lhe de utilidade no sentido de ampliar o caudal de seus conhecimentos neste ramo, ficaremos plenamente satisfeitos e compensados.

O autor

SOMA

E' comum na prática diária ouvir pessoas que tenham que dedicar algum tempo a operações aritméticas, queixarem-se do incômodo e embaralho que lhes resulta o somar, pela falta de controle nas somas parciais e totais e a atenção ininterrupta que devem dedicar a elas.

Para sanar esta dificuldade, podemos indicar-lhes processos seguros e eficientes, com a vantagem de que possam deixar a operação em qualquer momento desenvolvida como esteja e continuá-la quando lhes seja oportuno, sem necessidade de verificar as somas parciais das colunas já calculadas nem começar novamente todos os cálculos.

A seguir apresentaremos um exemplo prático, idêntico em cada caso para poder fazer a comparação, o que permitirá compreender ao primeiro golpe de vista o dispositivo da operação.

1.º PROCESSO.

Controle ou desenvolvimento da operação.

	Os que vão em cada coluna.	Terminação dos resultados parciais nas colunas.
64295.37	2	9
286.14	3	0
5428.61	4	2
319420.06	4	8
527965.43	3	1
2185.60	3	5
324.86	1	2
5276.02		9
925182.09		

Para fazer a operação começaremos pela direita, em cima ou em baixo dizendo:

1.ª coluna; começando em baixo diremos: 2 + 6 + 0 + 3 + 6 + 1 + 4 + 7 = 29, escrevemos 9 como terminação de um resultado parcial e vão 2, que escrevemos na coluna dos que levamos para somar com a segunda;

2.ª coluna: 2 que levamos + 0 + 8 + 6 + 4 + 0 + 6 + 1 + 3 = 30, escrevemos o 0 nas parciais e levamos o 3 e marcamos a vírgula decimal;

3.ª coluna: 3 que levamos + 6 + 4 + 5 + 5 + 0 + 8 + 6 + 5 = 42, escrevemos o 2 nos resultados parciais e levamos 4;

4.ª coluna: 4 que levamos + 7 + 2 + 8 + 6 + 2 + 2 + 8 + 9 = 48, escrevemos o 8 nas parciais e levamos 4;

5.ª coluna: 4 que levamos + 2 + 3 + 1 + 9 + 4 + 4 + 2 + 2 = 31, escrevemos o 3 nos parciais e levamos 3;

6.ª coluna: 3 que levamos + 5 + 2 + 7 + 9 + 5 + 4 = 35, escrevemos o 5 nos parciais e levamos 3;

7.ª coluna: 3 que levamos + 2 + 1 + 6 = 12, escrevemos o 2 (parciais) e levamos 1, e

8.ª e última coluna: 1 que levamos + 5 + 3 = 9 que escrevemos nos resutados parciais.

Com êste processo de fácil compreensão, poderemos deixar a operação em qualquer momento e tornar a seguí-la quando seja necessário e sem ter que proceder a verificação desde o comêço, já que observando as terminações nos resultados parciais vemos os que levamos: então contando os números que temos calculados que correspondem às colunas, poderemos continuar na que segue, sem possibilidade de erros nem esquecimentos de classe alguma.

Também temos os resultados parciais que são: 29, 30, 42, 48, 31, 35, 12 e 9; mas sòmente escreveremos as unidades dêles.

Uma vez colocado o resultado parcial (unidades) debaixo de cada coluna correspondente, começando pela direita ou pela esquerda, teremos o resultado, ou seja, o total de 925182.09.

2.º PROCESSO.

```
   133443.2
 ----------
   64295.37
     286.14
    5428.61
  319420.06
  527965.43
    2185.60
     324.86
    5276.02
 ----------
  925182.09
 ==========
```

Êste método também nos permite deixar a operação em qualquer momento e continuá-la a vontade sem repetir somas parciais.

Efetivamente diremos assim:

1.ª coluna: 2 + 6 + 0 + 3 + 6 + 1 + 4 + 7 = 29; escrevemos o 9 debaixo como resultado da primeira coluna, e o 2 que são os que levamos acima na segunda coluna, pois são décimas que agregaremos marcadas com um risco na parte inferior para diferençá-las da coluna, e continuaremos dizendo:

2.ª coluna: 0 + 8 + 6 + 4 + 0 + 6 + 1 + 3 + 2 (as que levamos) são 30; colocamos o 0 de baixo da segunda coluna como resultado parcial e o 3 que levamos e colocamos na terceira coluna para somá-lo com as unidades dessa ordem; (depois de marcar a vírgula das décimas) diremos;

3.ª coluna: 6 + 4 + 5 + 5 + 0 + 8 + 6 + 5 + 3 são 42, escrevemos o 2 debaixo e o 4 acima; agora,

4.ª coluna: 7 + 2 + 8 + 6 + 2 + 2 + 8 + 9 + 4 (que levamos da coluna anterior) são 48; escrevemos 8 e vão 4 que colocamos acima da coluna das centenas (a 4.ª ordem neste caso representa dezenas porque tem dois decimais); prosseguimos dizendo:

5.ª coluna: 2 + 3 + 1 + 9 + 4 + 4 + 2 + 2 + 4 são 31, escrevemos 1 e vão 3 que colocamos acima na coluna seguinte continuando agora assim:

6.ª coluna: 5 + 2 + 7 + 9 + 5 + 4 + 3 são 35, escrevemos o 5 e vão 3 que colocamos acima das dezenas de milhar; continuando agora na

7.ª coluna: 2 + 1 + 6 + 3 é igual a 12, escrevemos o 2 e vão 1 acima da ordem das centenas de milhar dizendo depois na

8.ª e última coluna: 5 + 3 + 1 é igual a 9 que escrevemos como final, sendo pois o resultado definitivo 925182,09, como no caso anterior.

3.º PROCESSO

64295.37
286.14
5428.61
319420.06
527965.43
2185.60
324.86
5276.02
29
28
39
44
27
32
9
8
925182.09

Desenvolve-se por somas parciais de cada ordem, cujos resultados se colocam abaixo de cada coluna e somando depois estas parcelas obteremos o total ou seja 925182.09 como pode-se verificar observando o dispositivo dêste caso.

Como final o resultado é o mesmo 925182.09 que nos dois processos feitos.

4.º PROCESSO.

Uma operação de somar torna-se muito dificultosa, quando a mesma é comprida demais, sendo mais prático dividir a mesma em frações, fazendo várias somas parciais que depois somam-se entre si para ter-se o resultado total.

Então vejamos:

Operação		Resultados Parciais
42876.87		
632854.32		
12865.06		
276428.35		965024.60
2428.03		
342.68		
527.10		
24682.37		27980.18
6542.80		
657.32		
529.00		
84376.55		92105.67
28738.62		
53287.81		
421637.45		
62173.24		565837.12
1650947.57	Total	1650947.57

Desta maneira facilitamos a operação, cujo controle também está feito pelo método usual de soma.

SUBTRAÇÃO

Processo para fazer com uma só operação a subtração de diversos números de outros diversos.

Um caso de utilidade prática que pode aplicar-se com muita freqüência.

Sejam os números 428765, 32864, 2306 e 12457 como minuendo que representaremos em conjunto por M, e os números 324132, 65827, 12, 328 e 12625 como subtraendo que representaremos juntos por S e disporemos assim a operação:

```
              1 2222   (ordens combinadas)
             ------
           | 428765 |
           |  32864 |
M  =      {    2306  } como minuendo          476392
           |  12457 |
             ------
           | 324132 |
           |  65827 |
S  =      {      12  } como subtraendo      — 402924
           |    328 |
           |  12625 |
             ------                          ------
Diferença ou resto 73468  =  resultado         73468
             ======          =======================
              112223   (ordens de complemento).
```


Faremos a operação diretamente de baixo para cima, dizendo na

1.ª coluna: 5 + 8 + 2 + 7 + 2 = 24 e diremos: de 30 restam 6 (subtraindo os 24 da próxima 3.ª dezena, 30 unidades). (Neste momento escrevemos na parte de baixo e abaixo do último traço o número 3 que são as dezenas complementares) e continuamos dizendo: 6 que restam + 7 (1.ª coluna abaixo no minuendo) + 6 + 4 + 5 = 28, escrevemos o 8 como resultado abaixo entre os dois últimos traços e acima de tudo no último traço, escrevemos o 2 (dezenas); agora diremos 3 dezenas de baixo menos 2 de cima = 1 a favor da parte de baixo; esta dezena acrescentaremos na 2.ª coluna, assim, agora na

2.ª coluna diremos: 1 (diferença das dezenas desta ordem) + 2 + 2 + 1 + 2 + 3 são 11 e diremos: restam 9 unidades (subtraindo 11 da próxima dezena 2). (Neste momento escrevemos de baixo do último traço o número 2 e continuamos dizendo: 9 que restam + 5 + 0 + 6 + 6 = 26, escrevemos o 6 como resultado abaixo entre os dois últimos traços e agora acima de tudo no último traço escrevemos o 2 e compulsamos os valores das ordens de baixo com os de cima dizendo: 2 de baixo e 2 de cima se compensam ou se anulam; e continuando a operação diremos na

3.ª coluna: 6 + 3 + 8 + 1 = 18, de 20 — 18 = 2, escrevemos 2 de baixo do último traço e continuamos no meio dizendo: 2 + 4 + 3 + 8 + 7 = 24, escrevemos entre os traços de baixo o 4, como resultado parcial e o 2 acima do último traço e diremos: 2 de baixo e 2 de cima se compensam; então passamos à

4.ª coluna. Diremos: $2 + 5 + 4 = 11$ ao próximo $20 - 11 = 9$, escrevemos 2 de baixo do último traço, e continuamos no meio dizendo $9 + 2 + 2 + 2 + 8 = 23$, escrevemos entre os traços de baixo o **3** como resultado parcial e o 2 acima do último traço e diremos, 2 de baixo e 2 de cima se anulam, e continuamos na

5.ª coluna dizendo: $1 + 6 + 2 = 9$, até a próxima dezena (desta ordem) vai 1 então escrevemos 1 de baixo do último traço e continuamos no meio operando assim: $1 + 1 + 3 + 2 = 7$, que escrevemos entre os dois traços de baixo como resultado parcial e não escrevemos nada acima do último traço (porque não tem ordem superior); e agora 1 que temos abaixo no último traço o agregaremos na

6.ª e última coluna dizendo: $1 + 3 = 4$, de 4 a 10 vão 6, escrevemos 1 abaixo de tudo e continuamos; $6 + 4 = 10$. Teríamos que pôr o **0** que não tem significação, porque 1 de baixo e 1 de cima se anulam; assim que fica resolvida a subtração dos tais números numa só operação como tínhamos anunciado.

Como resultado definitivo, diferença ou resto, o total é 73468.

Para comprovação vejamos o dispositivo dêste processo, onde fazemos a soma dos números 428765, 32864, 2306 e 12457 que formam um total de 476392 e que denominamos Minuendo, (M).

Depois, fazemos a soma dos números 324132, 65827, 12, 328 e 12625 cujo total de 402924, classificamos como subtraendo, (S).

Fazemos um traço, efetuando depois a subtração dos

números 476392 e 402924 que nos dá uma diferença ou resto de 73468 como resultado final.

Neste exemplo, as ordens de complemento de baixo tem sido superiores ou iguais às ordens de cima.

Caso os de cima forem superiores aos de baixo, em vez de somar a diferença, a subtraïremos e continuamos a operação da mesma maneira que o temos explicado.

Para que não exista dificuldade na explicação daquele caso, vamos expor um exemplo prático. Sejam os números 34908, 7954, 6420 e 297 como minuendo (M) e 248, 28309 e 648, os do subtraendo (S).

A operação dispõe-se assim:

	12312	ordens combinadas	
M =	34908 7954 6420 297	como minuendo	49579
S =	248 28309 648	como subtraendo —	29205
Resto	20374	Diferença ou resto	20374
	11213		

Diremos a continuação na

1.ª coluna: $8 + 9 + 8 = 25$; de 25 a 30 (3.ª dezena) vão 5, escrevemos o 3 (das dezenas) de baixo do

último traço e continuamos no meio assim: 5 + 7 + 0 + 4 + 8 = 24, escrevemos o 4 como resultado parcial e 2 acima nas ordens e fazemos a diferença 3 — 2 = 1 a favor da de baixo que somamos assim na

2.ª coluna: 1 + 4 + 0 + 4 = 9; de 9 a 10 — 1, escrevemos o 1 de baixo e continuamos no meio 1 + 9 + 2 + 5 + 0 = 17, escrevemos o 7 como resultado parcial e pomos 1 acima nas ordens, agora 1 — 1 se anulam e continuamos na

3.ª coluna dizendo: 6 + 3 + 2 = 11; de 11 a 20 vão 9, escrevemos o 2 (representação de 20) de baixo no último traço e continuamos no meio dizendo: 9 + 2 + 4 + 9 + 9 = 33, escrevemos o 3 como resultado parcial e pomos o outro 3 acima; agora bem, temos chegado no caso que o número de cima é maior que o de baixo, então procederemos assim: 3 que temos acima e 2 abaixo a diferença é 1 a favor de cima. Neste caso tiramos do primeiro número da 4.ª coluna 1 unidade como veremos na

4.ª coluna dizendo: 8 — 1 = 7 e de 7 a 10 (dezena) vão 3, escrevemos o 1 de baixo do último traço e continuamos no meio assim: 3 + 6 + 7 + 4 = 20, escrevemos o 0 como resultado parcial e colocamos o 2 acima no último traço, e outra vez o de cima é maior que o de baixo, diremos então 2 — 1 = 1 que passaremos subtraindo e operando como segue na

5.ª coluna e última: 2 — 1 = 1 e de 1 a 10 vão 9, escrevemos o 1 abaixo de último traço e continuamos no centro 9 + 3 = 12, cujo 2 escrevemos como resultado final porque observamos que colocando o 1 em cima anula o 1 de baixo.

A operação está terminada.

CASO DE SUBTRAÇÃO INVERSA.

E' hábito pôr o minuendo em cima e o subtraendo em baixo, mas como em alguns casos é conveniente subtrair a parte superior da inferior, como ocorre no consumo de luz, fôrça, água, navegação; pois se anotamos diária ou mensalmente, o consumo, a distância, etc.; teremos que, sempre a indicação anterior será menor e por conseguinte devemos subtrair da parte superior (acima) para a inferior.

Veja-se pelo seguinte esquema, como se deve fazer:

Dia	Mês	Ano	Control Contador	Consumo
22	Jan.	1936	874935	
23	”	”	875285	350
24	”	”	875836	551
25	”	”	876003	167
26	”	”	877005	1002
27	”	”	877348	343
28	”	”	877604	256

dando-nos o resultado 1.º 350, a diferença entre o dia anterior 874935 e o dia seguinte 875285 e assim sucessivamente, em cada um dos dias que se seguem.

Também pode-se encontrar a diferença entre quantidades não conseqüentes subtraindo-as uma da outra.

OUTRO CASO.

Existem casos em que temos que subtrair vários números de um número dado, então a operação pode fazer-se simultâneamente. Vejamos um exemplo.

Tinhamos em caixa 22:500$000 réis. Pagamos 4 faturas, sendo a primeira de 600$000 réis, a segunda de 1:150$000 réis, a terceira de 6:450$000 réis, e a quarta 450$600 réis. Quanto ficou em caixa depois dêstes pagamentos?

Dispõe-se assim a operação:

Em caixa	22:500$000	
—	600$000	Faturas pagas.
—	1:150$000	
—	6:450$000	
—	450$600	
	13:849$400	líquido

depois da operação.

Operamos colocando os dois últimos zeros da esquerda no resultado e depois continuamos dizendo: de 6 a 10 vão **4**, que escrevemos e levamos 1; agora, de 1 a 10 vão **9**, que escrevemos e levamos 1; prosseguimos dizendo: $1 + 5 + 5 + 5 = 16$; de 16 a 20 vão **4**, que escrevemos e levamos 2, depois 2 que levamos, $+ 4 + 4 + 1 + 6 = 17$, que para 25 faltam **8**, que escrevemos e levamos 2; depois, 2 que levamos $+ 6 + 1 = $ **9**, que até 12 vão **3**, que escrevemos e levamos 1; agora de 1 a 2 vai **1** que escrevemos como último número do resultado total que é o seguinte: **13:849$400.**

MULTIPLICAÇÃO

A operação de multiplicar é a que admite mais possibilidades de abreviação.

Será de fácil compreensão, si se seguirem os casos práticos que apresentaremos a seguir.

É preciso que quem opere, procure descobrir e perceber as abreviações que sejam possíveis de aplicar nas operações, transformações e desenvolvimentos que o cálculo apresenta, o que na prática lhe será fácil de aplicar, "ipso facto", sem nenhuma espécie de esfôrço, redundando tudo isso em benefício do operador que empregará menos tempo, menos quantidade de números e obterá os resultados com mais segurança.

Nossas mãos são uma máquina de multiplicar.

Efetivamente: representemos nossos dedos por números de acôrdo com os desenhos 1 e 2, isto é, o número 6 vem indicado pelo polegar, o número 7 pelo indicador, o número 8 pelo médio, o número 9 pelo anular

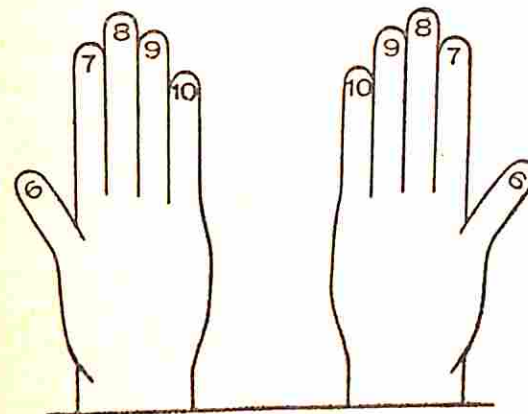



Fig. 1   Fig. 2

e o número 10 pelo mínimo. Tanto na mão direita como na esquerda.

Podemos calcular com elas, fazendo operações de multiplicação de dois números compreendidos entre 6 e 10, que são os que podemos representar com as mãos.

Para evitar dificuldades de compreensão, faremos o desenvolvimento de vários casos práticos. Seja o primeiro multiplicar o número 7 por 8.

Tendo todos os dedos, das duas mãos, estendidos, faremos tocar o indicador (7) da mão esquerda, com o médio 8 da mão direita e fecharemos os dedos das mãos, que sejam superiores aos 7 e aos 8 com que calculamos, ou sejam: 8, 9, e o 10 da mão esquerda e 9 e o 10 da mão direita. Os dedos que conservamos abertos tanto de uma mão como da outra ou sejam o 6, o 7 e o 8 da direita e o 6 e o 7 da esquerda são as dezenas da operação, isto é, 5, que são iguais a 50 unidades. Calculadas as dezenas precisamos calcular as unidades, que conseguiremos, observando os dedos que ficaram fechados e que são 3 (8, 9 e 10) na mão esquerda e dois (9 e 10) na mão direita e que multiplicaremos dizendo 2×3 igual 6 unidades que somadas com as 50 das 5 dezenas anteriormente ditas, perfazem em definitivo 56 unidades, como 7×8 que são os números que multipliicavamos.

OUTRO EXEMPLO.

Seja multiplicar 6×9.

Estendidos todos os dedos da mão esquerda, deixaremos aberto o dedo polegar e fecharemos o 7, 8, 9, e o 10.

Agora estendidos todos os dedos da mão direita, deixaremos abertos 6, 7, 8 e 9 e fecharemos o 10 por ser superior.

Feito isto, faremos tocar o dedo 6 da mão esquerda com o n.º 9 da mão direita e contaremos os dedos que se acham abertos contando inclusive os dois que se tocam. Veremos que em conjunto são 5, que representam as dezenas da operação ou sejam 50 unidades, mais a multiplicação dos dedos fechados que são 4 na mão esquerda e um na direita ou seja 4×1 igual 4, mais 50 que (representam as dezenas) são 54, de acôrdo com o resultado de 6×9 que era o que pretendíamos demonstrar.

MULTIPLICAR 10×10.

Conservaremos todos os dedos de ambas as mãos (direita e esquerda) abertos e diremos 10×10 igual 100, pois como não sobra nenhum dedo, êste é o resultado.

Quando se multiplica o número 10 por qualquer dos números 6, 7, 8 ou 9, parece que não corresponde à operação. Vejamos porque dá-se, isso:

Seja multiplicar 7×10.

Estendida a mão esquerda, contaremos até 7 deixando aberto o dedo (polegar) e 7 (indicador) e fecharemos o 8 (médio) o 9 (anular) e o 10 (mínimo). Depois na mão direita contaremos até 10 deixando todos os dedos abertos. Agora faremos tocar o 7 com o 10 e contaremos os dedos abertos que são conjuntamente 7, que representam as dezenas da operação e por conseguinte 70 unidades.

Algum leitor possìvelmente poderá dizer: como? Já temos o resultado, e ainda temos que multipicar 3 dedos que estão fechados na mão esquerda (o 8, 9 e 10)? Efetivamente sobram 3 dedos fechados na esquerda, mas na direita há 0 dedos fechados; então 3×0 igual 0 mais 70 das dezenas, dá-nos como resultado 70 unidades. De maneira que esta regra é sem excepção.

OUTRO EXEMPLO.

Multiplicar 10×6.

Como no caso anterior, tendo os dedos estendidos, faremos tocar o mínimo da esquerda com o polegar da direita e fechando os dedos que restam da operação ou sejam 0 na esquerda e 4 na direita (7, 8, 9 e 10) diremos assim: cinco dedos estendidos da mão esquerda, mais 1 da direita são 6, ou sejam as dezenas que são iguais a 60 unidades. Agora devemos procurar as unidades, multiplicando os dedos fechados, que são 0 na mão esquerda e quatro na direita, com os quais diremos 0×4 são 0 unidades mais 60 que tínhamos achado anteriormente, são definitivamente 60 unidades, coincidindo com o resultado de 6×10.

Esta é sòmente uma simples curiosidade que deixamos à consideração dos nossos leitores.

Multiplicar quantidades pela unidade seguida de zeros.

Para multiplicar quantidades pela unidade seguida de zeros, juntam-se ao multiplicando tantos zeros quantos tenha o multiplicador.

Exemplo:

$$38725 \times 100 = 3872500$$

Sendo número decimal, a vírgula passará para a direita tantas casas quantos zeros tiver o mutiplicador.

$$38725{,}1964 \times 10000 = 387251964;$$

outra,

$$365{,}28 \times 10 = 3652{,}8$$

Quando o multiplicando ou o multiplicador, ou os dois pela sua vez teem zeros, multiplicam-se entre si os algarismos significativos e juntam-se ao resultado tantos zeros quantos tenha um dos fatores resp. ou os dois fatores conjuntamente.

Exemplos:

```
    2864
  × 6000
--------
17184000
```

```
 3258400
     × 4
--------
13033600
```

```
  9456800
     × 80
---------
756544000
```

Se houver decimais, a vírgula passará para a direita, tantas casas no resultado quantos forem os zeros do multiplicador.

MULTIPLICAR POR 5

Multiplicar por 5 é o mesmo que multiplicar o número por 10 e dividir por 2.

Efetivamente 5 é igual a $\frac{10}{2}$; ou $5 = \frac{10}{2}$

Por exemplo seja multiplicar 642×5.

Diremos 642 : 2 = 321 e agora multiplicando por 10 que é o mesmo que acrescentar um zero, teremos em definitivo 3210.

MULTIPLICAR POR 50, 500, 5000, etc.

Como no caso anterior, operamos como se fôssemos multiplicar por 5 e acrescentamos ao resultado tantos zeros quantos tenha o multiplicador. Efetivamente; dizemos que multiplicar por 5 é o mesmo que multiplicar o n.º por 10 e dividí-lo por 2 ou também dividí-lo por 2 e multiplicá-lo depois por 10.

Operemos agora como indicámos e vejamos um caso prático, que seja por exemplo: 5326×500. Teremos 53260 (acrescentamos um zero que é igual a multiplicar por 10) e dividindo por 2 temos:

$$\begin{array}{rr} & 53260 \\ \hline \frac{1}{2} & 26630 \end{array}$$

e agora, acrescentando os dois zeros do multiplicador obtemos o resultado de 2663000.

MULTIPLICAR POR 25.

Por idêntica razão multiplicar por 25 é o mesmo que multiplicar um número por 100 e dividí-lo por 4; porque temos que 25 é igual a $\frac{100}{4}$; ou $25 = \frac{100}{4}$

Exemplo: Multipliquemos pelo método abreviado 642856 por 25; aplicando a teoria de que 25 é igual a 100 : 4, temos 642856×100 igual 64285600 que dividido por 4 dá-nos:

$$64285600 : 4 = 16071400$$

cuja divisão verificamos dizendo: ¼ de 6 ou, 6 : 4 da 1, que escrevemos como resultado e vão 2 que restam; 2 que restavam com 4 formam 24 que divididos por 4

dão-nos 6, que escrevemos e não resta nada; assim diremos: 2 : 4 é impossível, escrevemos pois 0 na ordem do resultado, então juntamos o 2 ao 8 formando 28 que dividimos por 4 e dá 7, que escrevemos como resultado e continuamos dizendo: 5 dividido por 4 dá 1, que escrevemos e vai 1 que com o 6 forma 16, que ao dividir por 4 dá 4, que escrevemos, e a seguir os dois zeros porque a 16 não sobra nada, e zero dividido por 4 dá zero, com o qual o resultado é de 16071400.

MULTIPLICAR POR 125.

Pelos sistemas expostos nos outros casos, multiplicar um número por 125 é o mesmo que multicá-lo por 1000 e dividí-lo por 8, porque

$$125 \text{ é igual a } \frac{1000}{8} \text{ ou } 125 = \frac{1000}{8}$$

Exemplo:

$$3624 \times 125$$

Aplicando o cálculo abreviado temos: 3624×1000 igual 3624000 e dividindo por 8 dá-nos 3624000 : 8 igual 453000 fazendo a operação assim: dividindo os dois primeiros algarismos por 8 dá 4 e restam 4, escrevemos 4 como primeiro algarismo do resultado; agora, os 4 que vão, com o 2 formam 42 que dividido por 8 dá 5 que escrevemos e vão 2 que com o 4 formam 24 que dividido por 8 dá 3 que escrevemos também e não resta nada, pelo qual escrevemos os três zeros restantes como resultado, pois o 0 dividido por 8 sempre é zero; sendo o producto definitivo 453000.

MULTIPLICAR POR UMA QUANTIDADE DE DOIS ALGARISMOS QUANDO UMA DELAS É A UNIDADE

1.º Caso:

Quado o algarismo das dezenas do multiplicador é a unidade.

Multiplica-se o algarismo que representa as unidades do multiplicador, por cada um dos algarismos que contém o multiplicando e a partir da multiplicação do segundo, juntam-se-lhes as unidades de ordem inferior, até finalizar a operação. Se faz caso omiso do algarismo 1 que representa dezenas que na pratica acostuma-se riscar.

Um caso prático conduzir-nos-á a melhor compreensão da forma de operar.

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 26537 \\ \times\ 16 \\ \hline 424592 \end{array}$$

Não demos importância ao número 1 e comecemos dizendo: 6×7 igual 42, escrevemos o 2 e vão 4, que com 6 × 3 igual 18 do segundo algarismo formam 22 mais 7 do primeiro algarismo somam 29; escrevemos o 9 e vão 2 que com 6×5 igual a 30 fazem 32 mais 3 do segundo algarismo formam 35; escrevemos 5 e vão 3 que com 6×6 igual 36, fazem 39, mais 5 do terceiro algarismo fazem 44; escrevemos 4 e restam 4, que com 6×2 igual 12 fazem 16, mais 6 do quarto algarismo são 22; escrevemos 2 e vão 2 que com 2 do último algarismo fazem 4 que escrevemos, de maneira que o resultado ou produto é de 424592.

2.º Caso:

QUANDO O ALGARISMO DAS UNIDADES DO MULTIPLICADOR E' A UNIDADE.

Faz-se a operação inversa.
Exemplo prático:

$$\begin{array}{r} 2847 \\ \times\ 41 \\ \hline 116727 \end{array}$$

Escrevemos primeiro 7 porque 1×7 igual a 7 e a seguir diremos: 4×7 igual a 28, mais 4, (algarismo da sua esquerda), fazem 32; escrevemos 2 e vão 3, mais 4×4 igual 16 e são 19, mais 8 formam 27; escrevemos 7 e vão 2 que com 4×8 igual 32, são 34, mais 2 formam 36; escrevemos 6 e vão 3 que com 2×4 igual 8, formam 11, que escrevemos, por ser o último número, dando em conseqüência como resultado 116727.

MULTIPLICAÇÃO POR 15.

Escreve-se o multiplicando seguido de um zero (o que eqüivale a multiplicar por 10) junta-se a metade dêste produto (que representa multiplicar por 5) sendo êste o resultado.

Caso prático

217486×15

2174860 (produto por 10) +
1087430 (metade deste produto) =

3262290 que é o resultado procurado.

MULTIPLICAÇÃO POR 75

Para multiplicar por 75, juntem-se dois zeros ao multiplicando e subtrai-se do produto a quarta parte. É natural que ao juntar dois zeros, multiplicamos por 100 que é igual a quatro vezes 25 (4×25) e como 75 é igual a três vezes 25 (3×25) devemos subtrair uma vez (1×25) que é o valor do multiplicando.

Seja multiplicar o número:

641286× 75 =
641286×100 = 64128600 = × 100
— ¼ 16032150 = — 25

Resultado 48096450 = 75×641286

MULTIPLICADOR que seja o número 9 ou diversos noves.

Acrescentam-se ao multiplicando tantos zeros quantos noves tem o multiplicador e se subtrai o multiplicando do número assim formado. Exemplo:

6248×9 =
62480 — 6248 = 56232.

Outro:

342765×999 =
342765000 — 342765 = 342422235

Poderíamos concretizar tal processo em regra dizendo que: quando tem que multiplicar-se uma quantidade (multiplicando) por outra que seja toda formada pelo algarismo 9, (multiplicador) escreve-se a primeira seguida de tantos zeros, quantos noves tem a segunda e se subtrai do resultado o multiplicando.

É natural que assim suceda, porque acrescentar os zeros, representa multiplicar pelo número que representam os noves mais 1; depois de multiplicar por esta soma o número e subtrair o multiplicando, subtrai-se ao resultado o mais 1, que representa em definitivo o valor numérico das unidades noves que servem de multiplicador, que nos exemplos mencionados são: (9+1) = 10 para o 1.º caso e (999+1) = 1000 para o segundo, e naturamente, ao acrescentar os zeros, temos multiplicado por (9+1) = 10 e por (999+1) = 1000, o que representaria, como observamos, o multiplicador aumentado de uma unidade, pela facilidade que se supõe multiplicar pela unidade seguida de zeros.

Assim sendo: se depois subtraímos do resultado obtido, o multiplicando, quer dizer, que das vezes que o tomamos como somando (naqueles casos 9+1 = 10 e 999+1 = 1000) subtraímos uma vez o multiplicando, ficou então demonstrado, ao fazer dita operação, que se toma sòmente 10 — 1 = 9 vezes e 1000 — 1 = 999, que são os multiplicadores aplicados nos dois casos e que nos deram resultados de conformidade com o que propunhamos obter.

Acrescentando 5 zeros ao número 15328764, o multiplicamos por 100000 ou por (99999+1); o que é o mesmo que tomá-lo como somando 100000 vezes. Assim sendo; se nós multiplicarmos o número 15328764 × 99999, eqüivale a tomá-lo esta última quantidade de vezes como somando e como 99999 é igual a 100000 — 1, podemos já escrever como método de resolução do problema 1532876400000 (cem mil vezes como somando) — 15328764 (uma vez como tal) = 1532861071236 que é o verdadeiro resultado.

Quando o multiplicando ou o multiplicador são possíveis de decompor-se em dois ou mais fatores, efetua-se a operação mais abreviadamente, multiplicando o número com o qual temos que operar por um dos fatores, o resultado pelo outro fator, êste último pelo outro e assim sucessivamente até terminar com êles; então dizemos: multiplica-se a quantidade por um dos fatores, seu resultado pelo seguinte e assim sucessivamente até fazê-lo com todos os fatores em que foi decomposto o multiplicador e uma vez terminado de multiplicar pelo último fator, o valor obtido será o resultado da operação.

Caso prático

Seja multiplicar: 258746×48

O número 48 pode decompor-se assim:

8 × 6

Opera-se da seguinte maneira:

```
258746 (multiplicando)
   × 8 (1.º fator)
-------
2069968
   × 6 (2.º fator)
--------
12419808
```

(1.º fator) 8 × 6 (2.º fator) = 48; então o número de vezes tomado como somando foi o mesmo e o resultado tem que ser o mesmo, assim como nos casos em que houver mais fatores.

Multiplicação de números compreendidos entre 10 e 20.

Com exemplos práticos compreendemos melhor como se fazem os cálculos.

Seja multiplicar 15 × 13. Dispõe-se assim:

```
  15
× 13
 ---
 195
```

(Risquemos o 1 do multiplicador. Poderíamos fazê-lo com o 1 do multiplicando e seria o mesmo).

Riscamos o número 1 do multiplicador e começamos a operação dizendo: 3×5 = 15, escrevemos 5 e levamos 1.

Agora dizemos: 1 que levamos mais 3 são 4 mais 15 igual a 19, que escrevemos antes do 5 e já temos o resultado que é 195.

Multiplicaremos outro número, por exemplo: 19 ×18. Dispõe-se assim a operação:

```
  19
× 18
 ---
 342
```

(Risquemos o 1 do multiplicador)

Faremos a operação dizendo: 8×9 = 72, escrevemos o 2 e vão 7; faz-se a soma dos 7 que vão, mais 8 e são 15; mais 9 igual 24; escrevemos o 4 e levamos 2 e como final, 2 que levamos mais 1 igual a 3 que escrevemos tendo como resultado 342.

Também para maior rapidez podemos dizer: 8×9 = 72, escrevemos o 2 e vão 7, mais 18 igual 25, mais

9 igual a 34, que escrevemos também antes do número 2 ou seja um total de 342.

Como se vê, tais multiplicações podem ser feitas mentalmente com a maior facilidade.

Multiplicação de números entre 10 e 100 terminados em 1.

Seja multiplicar 91×81.

Dispõe-se a operação como segue:

$$\begin{array}{r} 91 \\ \times\ 81 \\ \hline 7371 \end{array}$$

Riscamos o número 1 do multiplicando ou do multiplicador, e escrevemos o 1 como unidade.

Dizemos agora, 8 mais 9 igual 17, escrevemos o 7 e vai 1. Prosseguimos dizendo: $8 \times 9 = 72$, mais 1 que levamos são 73, que escrevemos, tendo o resultado de 7371, como se pode comprovar pelo método usual.

Multiplicação de números até 100 e que terminam em 5.

Multipliquemos 65×85.

Dispõe-se assim:

$$\begin{array}{r} 65 \\ \times\ 85 \\ \hline 5525 \end{array}$$

Multiplicamos primeiro 5×5, cujo resultado escrevemos. Diremos então: $6 + 8 = 14$ cuja metade é 7, agora $6 \times 8 = 48 + 7$ ditos $= 55$ que escrevemos à frente de 25 para termos então o total: 5525.

Devemos levar em conta também o seguinte: quando a soma das dezenas dos dois números não é divisível por 2, (exata), escrevemos a metade igual e como desprezamos 1, em lugar de ter por terminação 25, teremos 75. (Neste caso o número 1 representa 50 unidades).

Vejamos um caso prático, para não deixar dúvidas. Seja multiplicar 75×85.

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times\ 85 \\ \hline 6375 \end{array}$$

Dizemos 7 mais 8 igual a 15, cuja metade é 7 e vai 1 que desprezamos de momento. Agora $7 \times 8 = 56 + 7$ igual a 63 que escrevemos e agora como a metade de 7 mais 8 não era exata, escrevemos 75 em lugar de 25 que colocamos na direita como no caso anterior.

CASO ESPECIAL.

Quando os números da multiplicação de dois algarismos terminados em 5 forem iguais, não será preciso fazer a soma das dezenas e dividí-las por 2, senão que acrescentaremos em uma unidade qualquer dos fa-

tores (dezenas) e o multiplicaremos pelo outro. Isto explica-se perfeitamente porque, depois de ter riscado ou fazendo caso omiso dos números 5, se somarmos as dezenas, a semi-soma dêles forçosamente tem que ser o mesmo número, por serem os dois iguais.

Caso prático, seja multiplicar:

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 45 \\ \hline 2025 \end{array}$$

Depois de riscar as unidades diremos: $4 \times 5 = 20$, ou seja uma unidade mais, pois a semi-soma nos dá sempre 4 e depois juntaremos 25, como já explicámos, sendo o resultado 2025.

MULTIPLICAÇÃO ABREVIADA

Demonstrações práticas nos ajudarão a fazer com que o leitor compreenda como se multiplicam diversas quantidades entre si.

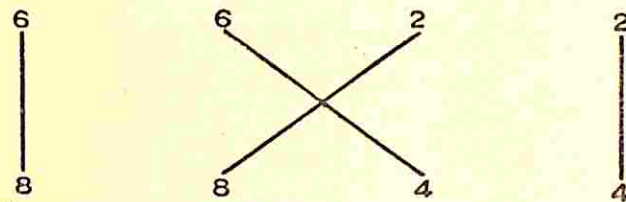
Explicaremos o mecanismo do processo e gràficamente como se desenvolve o procedimento da multiplicação.

Multiplicar entre si dois números de dois algarismos.

Seja multiplicar 62×84.

Dispõe-se assim a operação:

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times\ 84 \\ \hline 5208 \end{array}$$

cuja parte gráfica representaremos a seguir e que se desenvolve assim:

Diremos agora: $4 \times 2 = 8$, que escrevemos como resultado de unidades e continuamos dizendo: $4 \times 6 = 24$, mais $2 \times 8 = 16$, que somam em conjunto 40, escrevemos 0 como dezenas da operação e vão 4; continuamos dizendo, 4 que levamos mais $8 \times 6 = 48$, formam 52 que, tendo finalizado a parte gráfica, escrevemos integralmente como componente do resultado, de maneira que êste é igual a 5208.

FUNDAMENTO DA MULTIPLICAÇÃO ABREVIADA

A abreviação da multiplicação se baseia na multiplicação de uma soma por outra.

Efetivamente, seja multiplicar (a+b) por (c+d), ao desenvolver teremos ac+cb+ad+db

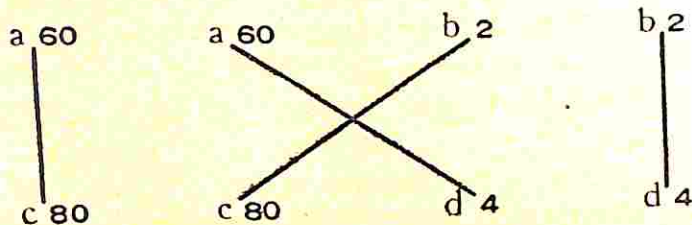
$$\begin{array}{c} a+b \\ c+d \\ \hline ac+cb+ad+db \end{array}$$

que nos dá a parte do desenvolvimento da operação e a concatenação das ordens. Efetivamente façamos aplicação prática de multiplicar:

Observemos que 62 é igual a 60 + 2 que representaremos 60 por a e 2 por b e que 84 é igual a 80 + 4 que representaremos 80 por c e 4 por d; então teremos:

$$\begin{array}{l} \quad\; a \;\; b \\ 62 = 60+2 = (a+b) \\ \times\, 84 = 80+4 = (c+d) \\ \quad\; c \;\; d \\ \hline 5208 = ac + cb + ad + db \end{array}$$

No cálculo abreviado operamos seguindo o gráfico que segue:

a 60 — c 80   a 60 ╳ b 2 / c 80 ╳ d 4   b 2 — d 4

Dizemos 4×2 = 8 ou seja db; 4×60 + 80×2 = 400 ou seja ad+cb e 80×60 = 4800 ou seja ac de modo que somando temos 5208 = ac+cb+ad+db, que é o que nos propúnhamos demonstrar, pois estão contidas todas as combinações obtidas na multiplicação de uma soma com outra, feita anteriormente.

RECOMENDAÇÃO.

A dificuldade que uma pessoa acha querendo seguir o método de multiplicação abreviada consiste em continuar o fio que concatena toda a operação.

Naturalmente que o costume de somar os resultados que em cada operação se verifica, põe obstáculos ao não iniciado, fazendo-o perder muitas vezes a relação das operações.

Porisso em cada operação é necessário, para acostumar-se, escrever os que se levam e ainda recomendamos aos que se iniciam, que façam separadamente as multiplicações das diferentes ordens, juntando os que vão e escrevendo o número correspondente no resultado e os que se levam, no gráfico do movimento a que corresponde.

Dêste modo se adquire hábito e prática da operação que poderá ser feita por qualquer pessoa que queira decorar êste método tão especial e de rapidez incrível. Executa-se então com facilidade, com singeleza e com menos esfôrço, que com o método comumente empregado.

Recomendamos também muita prática, para poder-se fazer as somas de produtos, aumentados das unida-

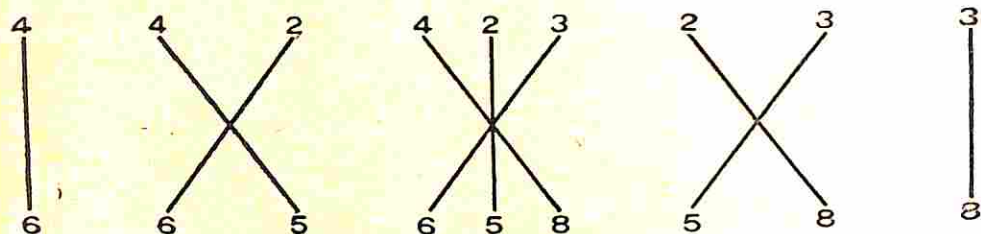
des que se levam; tornamos a dizer: o hábito e a persistência facilitam extraordinàriamente, e quem se exercita, surpreende-se da facilidade com que o verifica.

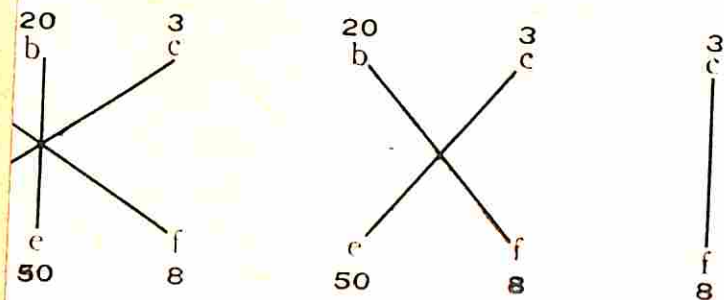
Se alguma vez se perder a orientação nos movimentos, é fácil poder prosseguir sem necessidade de repetir a operação; para isso basta contar as ordens que se fizeram, o que se consegue contando os movimentos executados, o que nos conduz a fixar ràpidamente a ordem onde devemos continuar a operação. Os exemplos dados poderão servir de guia e comentário ao que acabamos de expor.

MULTIPLICAR ENTRE SI DOIS NÚMEROS DE TRÊS ALGARISMOS.

Seja multiplicar 423×658.
Dispõe-se a operação como segue:

$$\begin{array}{r} 423 \\ \times\ 658 \\ \hline 278334 \end{array}$$

cuja parte gráfica representamos a seguir:

TRÊS CIFRAS

e aplicando a multiplicação abreviada verificamos a se-

+ ce + cf

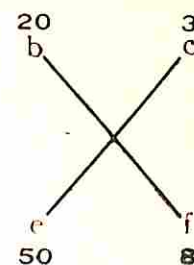
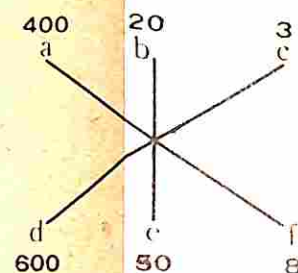
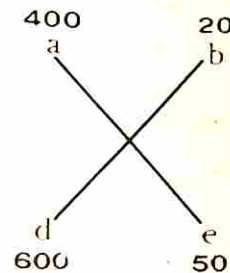
tifica plenamente

agregaremos ao 3.º movimento.
es de milhar que agregaremos ao 4.º movimento.
s de milhar que agregaremos ao 5.º movimento.
aver terminado a operação,
no se pode controlar por casos práticos que seguem. Tam-
ra, concatenando oral ou mentalmente todas as ordens que

porque as diferentes ordens na colocação dos resulta-

FUNDAMENTO DA MULTIPLICAÇÃO ABREVIADA PARA TRÊS CIFRAS

Seja: $423 \times 658 = (a + b + c)\ (d + e + f)$. Desenvolve-se a operação por letras e temos: $ad + ae + af + bd + be + bf + cd + ce + cf$, e aplicando a multiplicação abreviada verificamos a seguinte disposição:

cujo esquema de aplicação é

e operando dizemos:

$$
\begin{aligned}
3 \times 8 &= 24 = cf \\
8 \times 20 + 50 \times 3 &= 310 = bf + ce \\
8 \times 400 + 600 \times 3 + 50 \times 20 &= 6000 = af + cd + be \\
50 \times 400 + 600 \times 20 &= 32000 = ae + bd \\
600 \times 400 &= 240000 = ad
\end{aligned}
$$

e somando temos: $278334 = ad + ae + af + bd + be + bf + cd + ce + cf$

o que demonstra se terem feito todas as combinações nas ordens da multiplicação e cuja aplicação ao método rápido oral ou mental o ratifica plenamente

Vejamos a seguir:

1.º Movimento (unidades) $= 3 \times 8 = 24$, escrevemos o **4** e levamos 2 que são dezenas que agregaremos ao 2.º movimento.

2.º (*) " (dezenas) = levamos 2 (do 1.º movimento) $+ 8 \times 2 + 5 \times 3 = 33$, escrevemos o **3** e levamos 3 que são centenas que agregaremos ao 3.º movimento.

3.º " (centenas) = levamos 3 (do 2.º movimento) $+ 8 \times 4 + 6 \times 3 + 5 \times 2 = 63$, escrevemos **3** e levamos 6 que são unidades de milhar que agregaremos ao 4.º movimento.

4.º " (unidades de milhar) = levamos 6 (do 3.º movimento) $+ 5 \times 4 + 6 \times 2 = 38$, escrevemos o **8** e levamos 3 que são dezenas de milhar que agregaremos ao 5.º movimento.

5.º e último movimento (dezenas de milhar) = levamos 3 (do 4.º movimento) $+ 6 \times 4 = 27$, que escrevemos integralmente **27** por haver terminado a operação,

de maneira que o resultado nesta operação rápida, está de acôrdo com o demonstrado anteriormente e com o da multiplicação usual, como se pode controlar por casos práticos que seguem. Também observemos que por êste método se opera com todas as fases de combinação dimanantes da multiplicação de uma soma por outra, concatenando oral ou mentalmente todas as ordens que entram na operação.

Para certificar-se disso é mister prestar atenção nos valores (ordens) que vão tendo os números no seu desenvolvimento.

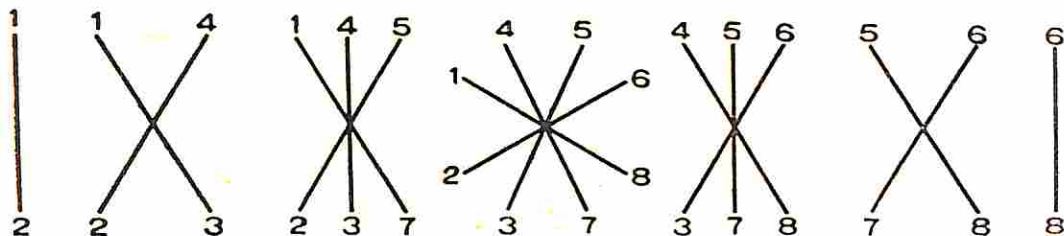
(*) Ao fazer a multiplicação dos números nos esquemas, deixamos de considerar os zeros das quantidades marcadas nas figuras, porque as diferentes ordens na colocação dos resultados parciais, ao escrevê-los totalizados, (com os que vão), correspondem aos seus verdadeiros valores.

Começando a calcular, diremos pelo primeiro sinal gráfico: $8 \times 3 = 24$, escrevemos como resultado 4 e vão 2; agora, 2 que vão, mais $8 \times 2 = 16$, formam 18, mais $5 \times 3 = 15$ e temos em conjunto o desenvolvimento do segundo sinal gráfico ou sejam 33; escrevemos o 3 como resultado e vão 3; continuamos dizendo: 3 que vão, mais $8 \times 4 = 32$, formam 35, mais $6 \times 3 = 18$ são 53, mais $2 \times 5 = 10$ (que completa o terceiro sinal gráfico) formam um total de 63; escrevemos 3 e vão 6; agora 6 que vão, mais $4 \times 5 = 20$, são 26, mais $6 \times 2 = 12$, são 38, escrevemos 8 e vão 3 (4.º sinal gráfico) e dizemos: 3 que vão, mais 6×4 igual 24, são 27, que escrevemos integralmente como resultado do produto por ser o fim do quinto sinal gráfico e da operação, sendo tal resultado 278334.

MULTIPLICAÇÃO DE DOIS NÚMEROS DE QUATRO ALGARISMOS.

Vamos multiplicar 1456×2378. Dispõe-se a operação como segue:

$$\begin{array}{r} 1456 \\ \times\ 2378 \\ \hline 3462368 \end{array}$$

Os gráficos da operação são da forma seguinte:

Tendo nós já desenvolvido anteriormente dois exemplos, êste será de fácil compreensão, eliminando muitas explicações, imprescindíveis nestes casos.

Começaremos dizendo: $8 \times 6 = 48$; escrevemos 8 e vão 4, agora 4 mais $8 \times 5 = 40$ e são 44, mais $7 \times 6 = 42$, são 86; escrevemos 6 e vão 8; agora, 8 mais $8 \times 4 = 32$ são 40, mais $3 \times 6 = 18$ são 58, mais $7 \times 5 = 35$ formando em conjunto 93; escrevemos 3 e vão 9; 9 que vão, mais $8 \times 1 = 8$ são 17, mais $2 \times 6 = 12$ são 29, mais $7 \times 4 = 28$ são 57, mais $3 \times 5 = 15$ forma 72; escrevemos 2 e vão 7; 7 que vão, mais $7 \times 1 = 7$, são 14, mais $2 \times 5 = 10$, são 24, mais $3 \times 4 = 12$ que formam 36; escrevemos 6 e vão 3; 3 que vão, mais $3 \times 1 = 3$ são 6, mais $2 \times 4 = 8$ são 14; escrevemos 4 e vai 1, e agora 1, mais $2 \times 1 = 2$ são 3, que escrevemos como final por não levar nada e haver terminado os sinais de maneira que o produto definitivo é 3462368.

MULTIPLICAÇÃO ABREVIADA DE NÚMEROS DE 5 ALGARISMOS.

Seja multiplicar 52631×91487.
Dispõe-se assim:

$$\begin{array}{r} 52631 \\ \times\ 91487 \\ \hline 4815052297 \end{array}$$

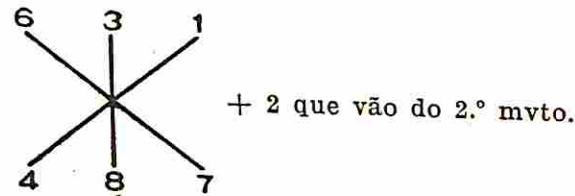
Vejamos como se desenvolve a operação com os gráficos da mesmo:

1.º Movimento

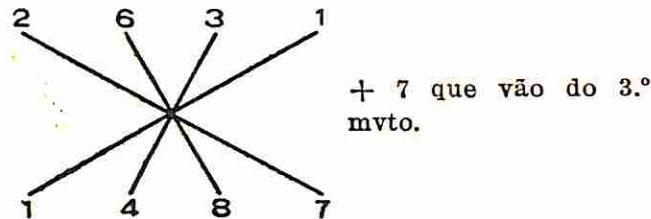
dizemos $7 \times 1 = 7$ que escrevemos e não vai nada.

2.º Movimento

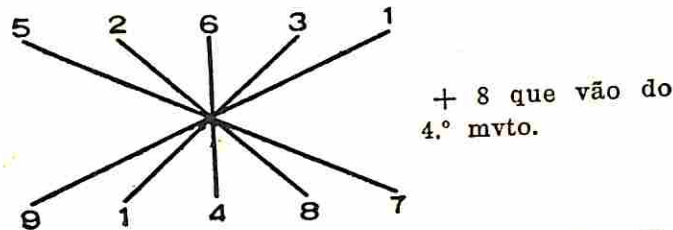
Dizemos agora, $7 \times 3 = 21$, mais 8×1 igual 29, escrevemos 9 como segundo algarismo do resultado e vão 2 que transportamos ao valor do:

3.º Movimento

+ 2 que vão do 2.º mvto.

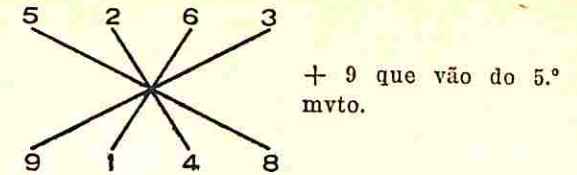
Dizemos assim: 7×6 = 42, mais 2 que vão do 2.º mvto. igual 44, + 4×1 = 4 e formam 48, + 8×3 = 24, que fazem 72; escrevemos 2 e vão 7 que levamos como componente do:

4.º Movimento

+ 7 que vão do 3.º mvto.

e continuamos dizendo: 7×2 = 14 mais 7 que vão do 3.º mvto. 21, mais 1×1 = 22 mais 8×6 = 48 e formam 70, mais 4×3 = igual 12 e são 82; escrevemos 2 e levamos 8 ao

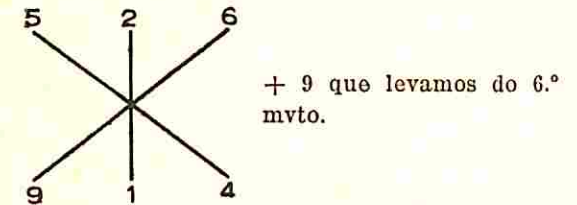
5.º Movimento

+ 8 que vão do 4.º mvto.

e dizemos: 7×5 = 35, mais 8 que vão do 4.º mvto. 43, mais 9×1 = 9 e são 52, mais 8×2 = 16, e são 68, mais 1×3 = 71, mais 4×6 = 24 formando 95, escrevemos 5 e vão 9 para o:

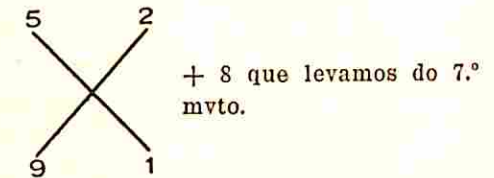
6.º Movimento

+ 9 que vão do 5.º mvto.

Agora dizemos 8×5 = 40, mais 9 que vão do 5.º mvto. igual 49, mais 9×3 = 27 e formam 76, mais 4×2 = 8 e são 84, mais 1×6 = 6 e são 90; escrevemos 0 e vão 9 que levamos ao:

7.º Movimento

+ 9 que levamos do 6.º mvto.

e continuamos dizendo: 4×5 igual 20, mais 9 que vão do 6.º mvto. 29 mais 9×6 igual a 54 e formam 83, mais 1×2 são 2 total 85, escrevemos 5 e vão 8 que levamos ao

8.º Movimento

+ 8 que levamos do 7.º mvto.

Seguimos assim: 1×5 igual a 5, mais 8 que levamos do 7.º mvto. são 13, mais 9×2 igual a 18 e formam 31, escrevemos 1 e vão 3 que levamos ao último ou seja:

9.° Movimento

5
|
9

+ 3 que levamos do 8.° mvto.

Dizemos: 9×5 igual a 45, mais 3 que vão do 8.° mvto. 48, que escrevemos integralmente, por ter finalizado toda a concatenação dos elementos para operar, sendo o resultado o que segue: 4815052297.

OPERAÇÕES QUANDO A QUANTIDADE DOS ALGARISMOS DO MULTIPLICANDO E DO MULTIPLICADOR, E' DESIGUAL.

Caso prático.

Seja multiplicar 123×45; temos

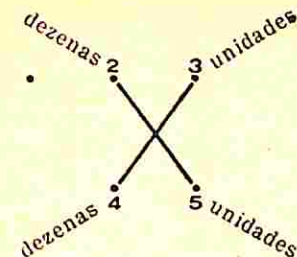
```
  123
× 45
-----
 5535
```

1.° Movimento

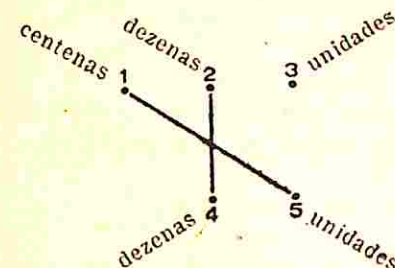
```
  123
× 45
-----
    5
```

e dizemos 5 × 3 = 15 escrevemos 5 e levamos 1, que passa ao 2.° movimento.

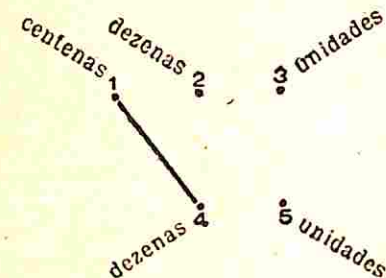
2.° Movimento

```
  123
× 45
-----
   35
```

e dizemos 5 × 2 = 10 mais 1 que levamos 11 mais 4 × 3 = 12 que somam **23**, escrevemos **3** e vão 2 (que passam ao 3.° movimento).

3.° Movimento

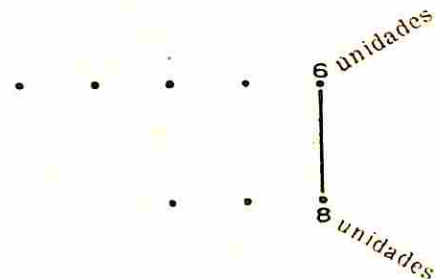
```
  123
× 45
-----
   35
```

dizemos 5×1 = 5 mais 2 que levamos 7 mais 4×2 = 8 que somam **15**, escrevemos **5** e vai 1. (que passa ao 4.° movimento).

4.° e último movimento

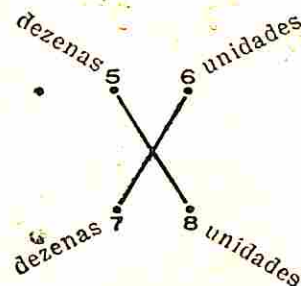
```
  123
× 45
-----
  535
```

dizemos 4×1 = 4 mais 1 que levamos são 5 que escrevemos como último número do resultado que é 5535

VÁRIOS ALGARISMOS COMO MULTIPLICANDO E TRÊS COMO MULTIPLICADOR.

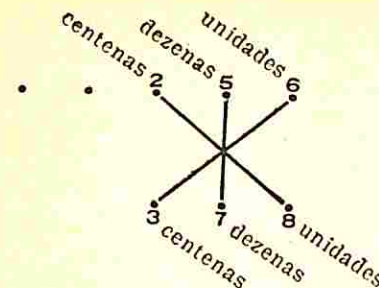
Caso prático.

```
   41256
  × 378
--------
15594768
```

1.° Movimento.

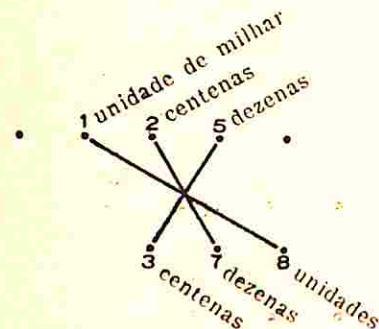
dizemos 6×8 = 48, escrevemos 8 e levamos 4 que transportamos ao 2.° movimento.

Resultado parcial ao terminar o 1.° movimento 8.

2.° Movimento.

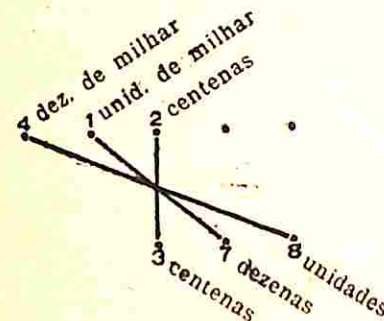
e continuamos dizendo: 8 × 5 = 40 mais 4 que vão do 1.° mvto. = 44 mais 7×6 = 42 que somam 86, escrevemos 6 e vão 8 que levamos ao 3.° movimento.

Parciais do resultado ao terminar o 2.° movimento 68.

3.° Movimento

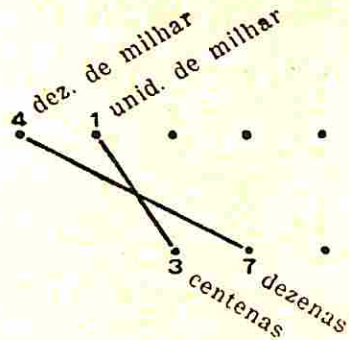
agora 8 × 2 = 16 mais 8 que vão do 2.° mvto. = 24 mais 3 × 6 = 42 mais 7×5 igual **77**, escrevemos 7 e vão 7 que levamos ao 4.° movimento.

Parciais do resultado ao terminar o 3.° movimento **768**.

4.° Movimento

continuamos dizendo: 8 × 1 = 8 mais 7 que vão do 3.° movimento = 15 mais 3 × 5 = 30 mais 7×2 igual **44**, escrevemos 4 e vão 4 que levamos ao 5.° movimento.

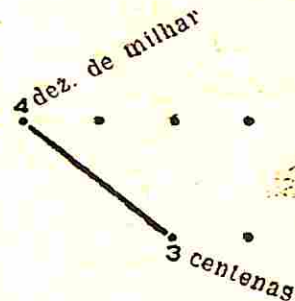
Parciais do resultado ao terminar o 4.° movimento **4768**.

5.° Movimento.

agora: 8×4 = 32 mais 4 que vão do 4.° movimento = 36 mais 3 × 2 = 42 mais 7×1 = **49**, escrevemos **9** e vão 4 que transportamos ao 6.° movimento.

Parciais do resultado ao terminar o 5.° movimento **94768**.

6.° Movimento.

e continuamos dizendo: 7×4 = 28 mais 4 que vão do 5.° movimento 32 mais 3×1 igual 3 e são **35**, escrevemos **5** e vão 3 que levamos ao 7.° movimento.

Parciais do resultado ao terminar o 6.° movimento **594768.**

7.° e último movimento.

agora: 3×4 = 12 mais 3 que vão do 6.° movimento = 15 que escrevemos íntegro por ter terminado toda a concatenação de ordens.

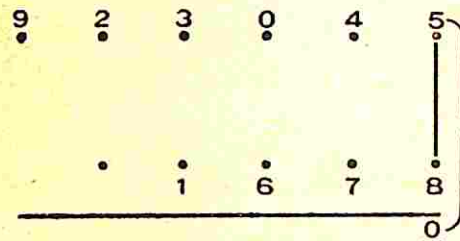
Total ou resultado ao terminar o 7.° e último movimento **15594768.**

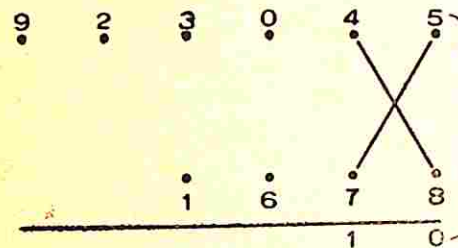
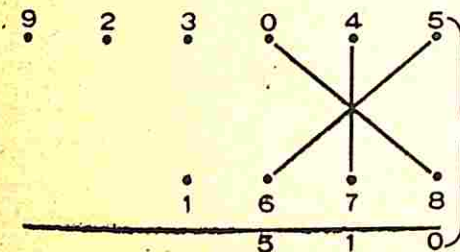
Parece muito complicada a manipulação dos números na forma que acabamos de expor. Mas não é assim, tendo um pouco de hábito e prática, resulta mais cômodo e rápido, que pelo método comum, como poderão comprovar nossos leitores si se decidirem a operar por êste método, tão prático, singelo e abreviado.

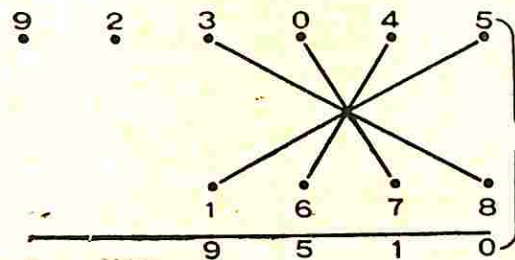
DIVERSOS ALGARISMOS POR QUATRO

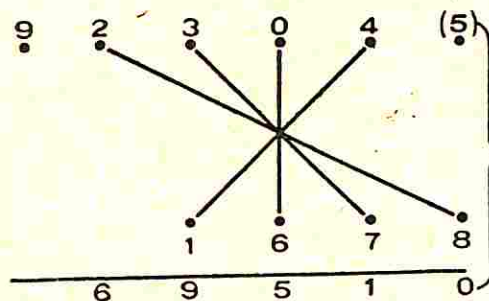
Seja:

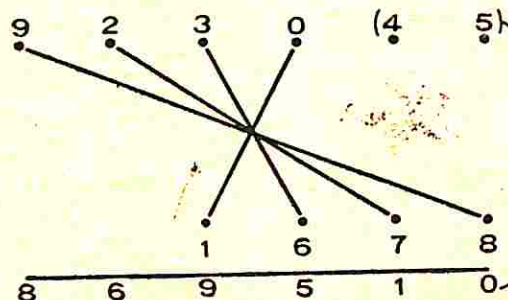
```
   923045
   × 1678
---------
154886510
```

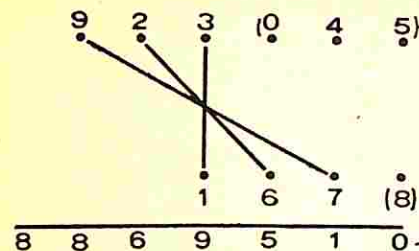
1.° Movimento.

Dizemos 5×8 = 40 escrevemos o **0** e vão 4 que levamos ao segundo movimento.

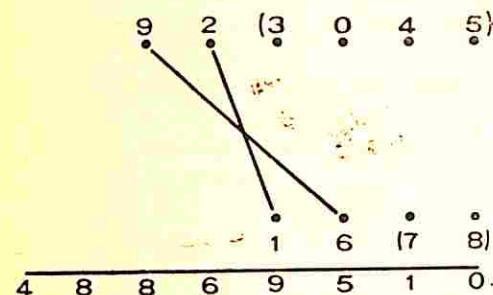
2.° Movimento.

agora 8×4 mais 4 (que vão do 1.° movimento) são 36, mais 7×5 = 71, escrevemos o **1** e vão 7 que levamos ao 3.° movimento.

3.° Movimento.

Agora 8×0 mais 7 (que vão do 2.° movimento) são 7, mais 6×5 = 37, mais 7×4 = **65.** escrevemos **5** e vão 6 que levamos ao 4.° movimento.

4° Movimento.

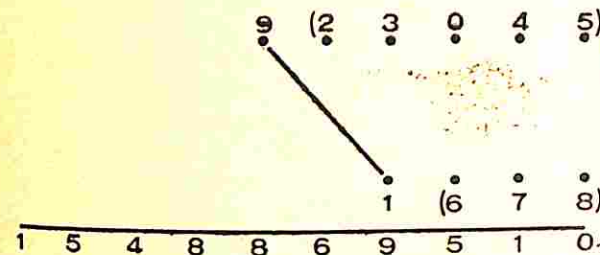
Dizemos: $8 \times 3 = 24$, mais 6 (que vão do 3.° movimento) $= 30$, mais $1 \times 5 = 35$, mais $7 \times 0 = 35$, mais $6 \times 4 = 59$, escrevemos 9 e vão 5 que levamos ao 5.° movimento.

5.° Movimento.

Deixamos o 5 (entre parenteses) por ter-se já verificado todas as combinações de concatenação e dizemos: $8 \times 2 = 16 + 5$ (que vão do 4.° movimento) $= 21$, mais $1 \times 4 = 25$, mais $7 \times 3 = 46$, mais 6×0 igual **46**, escrevemos o **6** e vão 4 que levamos ao 6.° mvto.

6.° Movimento.

Deixamos os números 4 e 5, (entre parenteses) pelas razões expostas no caso anterior e dizemos: $8 \times 9 = 72$, mais 4 (que vão do 5.° movimento) são 76, mais $1 \times 0 = 76$, mais $7 \times 2 = 90$, mais $6 \times 3 = 108$, escrevemos o 8 e vão 10, que levamos ao 7.° movimento.

7.° Movimento.

Deixamos os números (045) do multiplicando e o (8) do multiplicador, pelo que já temos explicado e seguimos dizendo: $7 \times 9 = 63$, mais 10 (que vão do 6.° movimento) 73, mais $1 \times 3 = 76$, mais $6 \times 2 = 88$, escrevemos o 8 e vão 8 que levamos ao 8.° movimento.

8.° Movimento.

Deixamos os números (3045) e 78 pelo anteriormente dito e seguimos: 6×9 igual 54, mais 8 (que vão do 7.° movimento) $= 62$, mais $1 \times 2 = 64$ escrevemos o 4 e vão 6 que passamos ao 9.° e último mvto.

9.° e último movimento.

Deixamos os números (23045) do multiplicando e (678) do multiplicador e dizemos: $1 \times 9 = 9$, mais 6 (que vão do 8.° movimento) $=$ a 15, que escrevemos integralmente por ser a última combinação resultante.

Assim que o resultado é 1548869510.

Como podemos observar, podem-se fazer multiplicações de qualquer quantidade de algarismos, guardando a simetria precisa para operar, conforme temos visto pelos exemplos práticos, anteriores.

E' muito interessante e prático nas operações em que a quantidade de números do multiplicando é desigual ao do multiplicador, completar com zeros as diferentes ordens.

Vejamos um exemplo:

47601
× 325

Nas ordens superiores escrevem-se zeros, então a operação fica mais fácil para o principiante, transformando-se assim:

47601
× 00325

15470325

Ao calcular diremos: 5×1 = 5, que escrevemos e não vai nada; 5×0 = 0, mais 2×1 = 2 que escrevemos também sem levar nada; 5×6 = 30, mais 3×1 = 33, mais 2×0 = 33, escrevemos o 3 e vão 3; 5×7 = 35, mais 3 que levamos são 38, mais 0×1 = 38, mais 2×6 = 50, mais 0×3 = 50, escrevemos o 0 e levamos 5; 5×4 = 20, mais 5 que levamos são 25, mais 0×1 = 25, mais 2×7 = 39 mais 0×0 mais 3×6 = 57, escrevemos o 7 e vão 5; agora 2×4 = 8, mais 5 que levamos são 13 mais 0×0 = 13, mais 3×7 = 34, mais 0×6 = 34, escrevemos o 4 e levamos 3; 3×4 = 12, mais 3 que levamos são 15, que escrevemos integralmente, porque o resultado que segue de 0×6 e de 0×7 é zero.

MULTIPLICAÇÃO DE ALGARISMOS SERVINDO-NOS DO COMPLEMENTO.

Veremos agora a multiplicação de algarismos cujos valores estejam perto da unidade seguida de zeros usando do complemento a 100 ou a 1000 etc.

Seja multiplicar 96×92. Dispõe-se assim a operação:

96 até 100 vão 4 (complemento)
× 92 " 100 " 8 "

8832

Agora diremos: 96 — 8 igual 88
Também 92 — 4 igual 88

cujo número 88 eqüivale às centenas da operação: agora acharemos as dezenas e unidades multiplicando entre si os complementos: 4×8 igual 32 que escrevemos a seguir das centenas formando definitivamente o produto total, igual a 8832.

Outro exemplo:

Multiplicar 93×88.

Dispõe-se assim:

93 até 100 (complemento) vão 7
× 88 " 100 " " 12

8184

temos 93 — 12 igual 81 — que são as centenas
como 88 — 7 igual 81 — do resultado

e cujas dezenas e unidades são o produto de 7×12, igual 84, de forma que escrevendo êste resultado parcial atrás das centenas teremos como resultado total 8184.

MULTIPLICAR DOIS NÚMEROS DE TRÊS ALGARISMOS ENTRE SI, SERVINDO-NOS DO COMPLEMENTO.

Seja procurar o produto de 977×992.

Dispõe-se assim a operação:

977 até 1000 vão 23. (complemento a 1000)
× 992 " 1000 " 8. " " "

969184

dizemos 977 — 8 igual 969
também 992 — 23 igual 969

que são os milhares do resultado e cujo produto parcial de 8×23 igual a 184 escrevemos em continuação de 969 para formar assim definitivamente o produto total de 969184.

MULTIPLICAÇÃO POR NÚMEROS QUE SEJAM DÍGITOS REPETIDOS

Para multiplicar por números que sejam os dígitos repetidos, dois, três, quatro, etc., vezes, como por exemplo: 22, 33, 44,

55, 66, 77, 88, 99, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999, etc. multiplica-se o número por 11, quando é de dois algarismos; por 111, quando é de três algarismos; por 1111 quando é de quatro e assim sucessivamente, e o resultado obtido multiplica-se por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ou 9 segundo seja o valor absoluto de cada um dos dígitos iguais que compõem o multiplicador.

Caso prático.

54026 × 33; 33 = (3 × 11) diremos 54026 × 11 × 3 ou bem 54026 × 3 × 11 que será na primeira aplicação:

54026 × 11 = 594286 × 3 = 1782858

e na segunda

54026 × 3 = 162078 × 11 = 1782858

No primeiro caso diremos: 1.°: 6 = **6,** que escrevemos; 2.°: 6 + 2 = **8,** que escrevemos também; 3.°: 2 + 0 = **2,** que escrevemos; 4.°: 0 + 4 = **4,** que escrevemos; 5.°: 4 + 5 = **9,** que escrevemos e 6.° e último, escrevemos o 5 porque a operação terminou. Agora multiplicamos dizendo: 3 × 6 = 18, escrevemos 8 e levamos 1, depois 3 × 8 = 24 mais 1 são 25 que escrevemos e levamos 2; 3 × 2 = 6 mais 2 são 8 etc.

Outro caso:

202654 × 555;
555 = (111 × 5)
202654 × 5 × 111 ou também
202654 × 111 = 22494594 × 5 = 112472970

que será idêntica aplicação do primeiro caso. E também:

202654 × 5 = 1013270 × 111 = 112472970

em cuja multiplicação por 111 diremos 1.°: **4** que escrevemos; 2.°: 4 + 5 = 9, que escrevemos; 3.°: 4 + 5 + 6 = **15,** escrevemos o 5 e levamos 1; 4.°: 1 + 5 + 6 + 2 = **14,** escrevemos o 4 e levamos 1; 5.°: 1 + 6 + 2 + 0 = 9 que escrevemos também; 6.°: 2 + 0 +2 = 4, que escrevemos; 7.°: 0 + 2 = 2, que escrevemos e depois 8.°: escrevemos o 2 por ser o último e multiplicamos por 5. Então o resultado será:

112472970

PROVA DO 9 NA MULTIPLICAÇÃO.

Para certificarmo-nos de que a multiplicação está bem calculada, explicaremos pràticamente como fazer o controle, servin-

do-nos do que se chama a prova do 9, fundado nos restos dêste número.

Caso prático.

Multipliquemos:

46258	= 8 + 5 + 2 + 6 + 4 =25; agora 2 + 5 = 7
× 4215	= 5 + 1 + 2 + 4 = 12; agora 1 + 2 = 3.
———	Dizemos agora 7 × 3 = 21 e 1 + 2 = 3.
231290	
46258	Para que a operação esteja bem feita, a soma
92516	nesta forma do resultado tem que ser 3.
185032	Vejamos:
———	0 + 7 + 4 + 7 + 7 + 9 + 4 + 9 + 1 = 48
194977470	e 8 + 4 = 12 e 2 + 1 = 3. Operação conforme.

Somamos os valores absolutos do multiplicando que são 8 + 5 + 2 + 6 + 4 = 25 e tornamos a somar até que sòmente fique um algarismo ou seja 5 + 2 = 7.

Somando agora os do multiplicador que são 5 + 1 + 2 + 4 = 12 e tornando a somar para achar sòmente um algarismo temos 1 + 2 = 3 que escrevemos debaixo do 7.

Multiplicando agora estes números 7 × 3 = 21 e somando para obter um só algarismo, temos 1 + 2 = 3, o que indica que a soma dos valores absolutos do resultado da operação que controlamos, tem que ser também 3 para estar de acôrdo.

Efetivamente; somamos os números do resultado dizendo: 0 + 7 + 4 + 7 + 7 + 9 + 4 + 9 + 1 = 48 e 8 + 4 = 12 e 2 + 1 = 3.

Na prática, quando se soma e tem noves a soma dêstes números ou se chega a múltiplo de 9, faz-se caso omisso dêles e continua-se com os restantes.

No resultado diríamos 1 + 4 + 7 + 7 + 4 + 7 = 30 igual a 3 porque o zero não tem influência neste caso.

Resultando exato o controle, não quer dizer que a operação esteja perfeita, pois poderia ter-se errado de nove unidades numa ordem qualquer ou também ter-se compensado estes erros, então estaríamos na crença de um resultado perfeito; mas isto seria uma probabilidade que dificilmente se apresenta.

A prova do 9, pode aplicar-se também na soma, subtração e divisão, seguindo o ritmo que cada operação desenvolve parcialmente e comprovando com os resultados obtidos.

DIVISÃO

A divisão é a operação mais difícil de fazer das que até agora explicamos, mas presta-se também a uma quantidade de abreviações, que si se conhecem, facilitam muito a maneira de operar.

DIVIDIR PELOS DÍGITOS

Para dividir pelos dígitos é fácil e muito prático dispor a operação na forma de poder tirar 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, o 1/9 para dividir respectivamente por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Exemplos práticos.

Seja dividir:

823456 : 2

Dispõe-se assim a operação:

823456
———
1/2 411728

e operamos começando pela esquerda dizendo:

1.° cálculo. A metade de 8, é **4**, que escrevemos de baixo do 8.
2.° " A metade de 2, é 1, que escrevemos de baixo do 2.
3.° " A metade de 3, é 1, que escrevemos de baixo do 3, e sobra 1, que agregamos ao 4 que segue para o
4.° " A metade de 14 (formado com o n.° 1 que sobrou no 3.° cálculo e o 4) é 7 que escrevemos debaixo do 4
5.° " A metade de 5, é 2, que escrevemos de baixo do 5 e sobra 1, que agregamos ao 6 que segue para o
6.° " e último. A metade de 16 (formado com o n.° 1 que sobrou no 5.° cálculo e o 6) é 8, que escrevemos como final da operação.

Se a divisão não tivesse sido exata, teria sobrado uma unidade e teríamos dito: 1 com um zero formam 10, e escreveríamos o n.° 5 depois do 8, mas, teríamos marcado primeiramente o 5 com uma vírgula que mencionasse os decimais, suposto que a parte inteira terminasse no último dividendo e porisso o 5 representaria os decimais.

2.° Exemplo: 317862 : 3

Dispomos assim a operação:

317862
———
1/3 105954 e dizemos:

1.° cálculo. O têrço de 3, é **1**, que escrevemos de baixo do 3
2.° " O têrço de 1, é **0**, que escrevemos de baixo do 1 e sobra 1, que agregamos ao 7 que segue para o
3.° " O têrço de 17, é **5**, que escrevemos de baixo do 7 e sobram 2 que agregamos ao 8 que segue para o
4.° " O têrço de 28, é **9**, que escrevemos debaixo do 8 e sobra 1 que agregamos ao 6 que segue para o
5.° " O têrço de 16, é **5**, que escrevemos de baixo do 6 e sobra 1 que agregamos ao 2 que segue para o
6.° " e último. O têrço de 12, é **4**, que escrevemos de baixo do 2 terminando a operação.

Quando a divisão não tem quociente exato, pode-se pôr o resultado em forma de fração ou decimais.

Seja dividir: 1425 : 6. Dispõe-se assim:

1425
———
1/6 237 3/6 ou 237 1/3 ou

1425
———
1/6 237,5

Diremos: o 1/6 de 14, é 2, que escrevemos de baixo e sobram 2, que com o 2 seguinte formam 22; o 1/6 de 22, é 3, que escrevemos de baixo e sobram 4 que com o 5 formam 45; o 1/6 de 45, 7, que escrevemos de baixo do traço, podendo ser em forma de fração 3/6 ou 1/3. (1.° desenvolvimento) ou poderemos também ao lado direito do 7 marcar uma vírgula e seguir calculando os decimais, e neste caso se dirá: 3 que sobravam com um 0 fazem 30 e o 1/6 de 30, é **5**, que escrevemos ao lado do 7, dando assim de resultado 237,5 (2.° desenvolvimento) e terminamos a operação por ter sido exata a última divisão por 6. Se não fôsse assim teríamos continuado a procurar mais números decimais, juntando zeros a cada resto.

Se o dividendo contém decimais, faz-se a operação como com os inteiros, cuidando-se ùnicamente de marcar a vírgula decimal, quando chegarmos a ela.

Vejam o dispositivo do seguinte caso prático:

$$\frac{85432,564}{1/7 \quad 12204,652}$$

Para dividir pela unidade seguida de zeros, se o dividendo é inteiro, separam-se com uma vírgula para a esquerda tantas casas quantos zeros tenha a unidade, formando assim a parte decimal, e se o dividendo de por si já é um número decimal, se correrá a vírgula para a esquerda, também tantas casas quantos zeros tiver o divisor, e o número assim diminuído será o quociente.

Caso prático.

82356 : 10 = 8235,6
82356 : 100 = 823,56
82356 : 1000 = 82,356
82356 : 10000 = 8,2356
82356 : 100000 = 0,82356
82356 : 1000000 = 0,082356
82356 : 10000000 = 0,0082356

e assim sucessivamente e se tivesse parte decimal, da seguinte forma:

823,56 : 10 = 82,356
823,56 : 100 = 8,2356
823,56 : 1000 = 0,82356
823,56 : 10000 = 0,082356
823,56 : 100000 = 0,0082356
823,56 : 1000000 = 0,00082356
823,56 : 10000000 = 0,000082356

Observamos que quando não havia mais algarismos significativos, pusemos zero e vírgula e assim conseqüentemente e que no 2.° caso como havia dois algarismos decimais, a vírgula foi deslocada a partir de dito lugar.

Se no lugar da unidade seguida de zeros fôsse outro algarismo significativo, poderíamos primeiro passar a vírgula e depois dividir por dito algarismo.

Exemplo:

28653,92 : 4000

começaremos passando a vírgula e então teremos, 28,65392 e agora dividimos por 4, assim:

$$\frac{28,65392}{1/4 \quad 7,16348}$$ sendo êste o resultado.

Se houver decimais tanto no dividendo como no divisor, deve-se observar e prestar atenção aos lugares a correr, partindo do sítio onde estão os sinais decimais.

DIVIDIR POR 5, 50, 500, ETC.

Para dividir por 5, poderemos fazê-lo muito rápido, se observarmos que dividir por 5 é o mesmo que multiplicar por 2 : 10, que nos diz que, devemos multiplicar o número por 2 e dividir por 10 o total.

Exemplo:

65428 : 5

Aplicando aquela igualdade teremos 65428×2 igual 130856, que dividido por 10, faremos correr a vírgula um lugar dando como resultado definitivo 13085,6.

ou também $\frac{1}{5}$ igual $\frac{65428}{13085,6}$

Para dividir por 50 multiplica-se por 2 e divide-se por 100; por 500, multiplica-se por 2 e divide-se por 1000 e assim sucessivamente por 5000, 50000, etc.

DIVIDIR POR 25

Para dividir por 25 multiplica-se o dividendo por 4 e divide-se por 100, porque dividir por 25 é o mesmo que multiplicar por 4 e dividir por 100.

Exemplo: 836 : 25.

Aplicando a fórmula veremos que 836×4 = 3344, que dividido por 100 dá-nos 33,44 como no método comum.

DIVIDIR POR 75

Dividimos por 100 como representação das 4 partes e já que 75 é igual $\frac{3}{4}$, para obter o resultado temos que agregar $\frac{1}{3}$ parte.

Exemplo: 63249 : 100 = 632,49

mais $\frac{1}{3}$ = 210,83

Total... 843,32

DIVIDIR POR 125

Poderemos dividir por 125 com rapidez se observarmos que dividir por 125 é o mesmo que multiplicar o dividendo por 8 e dividir o resultado por 1000.

Exemplo:

Seja dividir: 8265 : 125.

Temos segundo a definição anterior 8265×8 = 66120 que dividiremos por 1000 sinalando como uma vírgula assim 66,120, que corresponde exatamente ao resultado.

DIVISÃO POR DECOMPOSIÇÃO DO DIVISOR

Quando é possível decompor o divisor em fatores, podemos fazer mais fácil a operação, dividindo sucessivamente por cada um dêles o dividendo.

Vejamos um caso prático:

654290 : 35

cujo divisor é igual a 5×7; então faremos a operação abreviada assim:

	654290	
1/5	130858	e agora êste por
1/7	18694	cujo resultado é

exato porque dividir sucessivamente por 5 e por 7, é o mesmo que fazê-lo por 35.

Outro exemplo: 794304 : 192

cujo divisor é igual a 4×6×8; então dispõe-se assim a operação:

	794304	que dividimos por
1/4	198576	e agora por
1/6	33096	e por último por
1/8	4137	de acôrdo com os fatores

acima mencionados, pois que 4×6×8 é igual a 192 que é o divisor da operação

Recordando a divisibilidade dos números nos será fácil deduzir mentalmente como se podem decompor os divisores na operação de dividir.

Efetivamente; Um número é divisível por 2, quando o algarismo que representa as unidades, fôr zero ou algarismo par.

Um número é divisível por 3, quando a soma do valor absoluto de seus algarismos é divisível por 3 ou múltiplo de 3.

Um número é divisível por 4, quando termina em dois zeros, ou o número formado pelos dois últimos algarismos é múltiplo de 4 e também quando o algarismo das unidades agregada ao duplo das dezenas são divisíveis por 4.

Um número é divisível por 5, quando termina em 0 ou em 5.

Um número é divisível por 6 quando seja divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo, ou também quando é divisível por 3 e termina em zero ou cifra par.

Um número de três algarismos é divisível por 7, quando somados os algarismos das unidades, mais o triplo das dezenas, mais o duplo das centenas dá 7 ou multiplo de 7. Quando o número tenha mais de três cifras, se divide em períodos de três algarismos começando pela direita e subtraida a soma dos algarismos que formam grupos ímpares dá que sejam pares, se o resto é 7 ou múltiplo de 7, o número é divisível por êste número.

Um número é divisível por 8, quando termina em 3 zeros ou também quando as três últimas cifras são divisíveis por 8 e

quando a soma das unidades, mais o duplo das dezenas conjuntamente com o quádruplo das centenas é 8 ou múltiplo de 8.

Um número é divisível por 9, quando a soma dos algarismos dá 9 ou múltiplo de 9.

Um número é divisível por 10 quando terminar em 0.

Um número é divisível por 11, quando a soma dos valores absolutos dos algarismos de lugar par é igual à soma de lugar ímpar, ou também se a diferença entre elas é 11, ou múltiplo de 11.

Um número é divisível por 12, quando é divisível por 3 e por 4 ao mesmo tempo.

Um número é divisível por 25 quando termina em dois zeros ou as duas últimas cifras da direita sejam 25 ou múltiplo de 25.

Um número é divisível por 125, quando termina em três zeros ou as três últimas cifras da direita sejam 125 ou múltiplo de 125.

DE UTILIDADE COMERCIAL

Às vezes precisamos calcular os lucros sôbre o custo ou sôbre a venda de um objeto, pois são dois assuntos completamente diferentes que o comerciante precisa levar muito em conta, e como tem alguns que não lhe dão importância por desconhecer a diferença que existe entre um e outro, coisa que pode prejudicar-lhes, vamos fazer o cálculo dos dois com exemplos práticos, para que se possa apreciar a verdade do acêrto que pretendemos.

Calculemos os dois casos.

Temos uma partida de banha que vendemos ao preço de 4:250$000 réis, sendo que nos tinha custado 3:750$000 réis. Que percentagem sôbre o preço de custo obtivemos?

Líquido obtido na venda	4:250$000
Importe do custo	3:750$000
Lucro	510$000

Se em 4:250$000, obtemos 510$000 de lucro, corresponde por

cada 1$000 réis, 510/4250 e por cada 100$000 (o que procuramos) 100 vezes mais ou seja:

$$\frac{510 \times 100}{4250} = \frac{51000}{4250} = \text{Dividindo por 100} = \frac{510}{42,5} =$$

12%, de ganância obtida **sôbre o custo da mercadoria.**

OUTRO CASO.

No caso anterior calculamos a percentagem de lucro sôbre o custo, sabendo o que nos tinha custado a mercadoria e o líquido obtido na venda.

Agora vamos saber a quanto temos que vender a mercadoria para obter uma percentagem determinada.

Temos outra partida de banha que nos custou 12:500$000 réis e queremos ganhar uma percentagem de 8%; A que preço devemos vender para obter o lucro desejado?

Se quiséssemos ganhar 8$000 réis por cada 1$000, neste caso teríamos que multiplicar, 12:5000$000 × 8, mas como queremos ganhar 8$000 por cada 100$000 réis, faremos o seguinte:

$$\frac{12:500\$000 \times 8}{100}$$ e que operando dá um resultado igual a:

12:500$000×8 = 100:000$000 contos que dividimos por 100 e temos 1:000$000 de réis, sendo esta última a importância que devemos aumentar ao custo da mercadoria, obtendo assim o preço de venda de: 12:500$000 + 1:000$000 = 13:500$000 para conseguir a percentagem de lucro sôbre o custo.

Agora veremos como se calcula a percentagem sôbre a venda, não sôbre o custo, coisa muito diferente e que é de grande importância e que os comerciantes devem ter muito em conta, como já foi dito:

Exemplo: Temos uma partida de aço cujo custo foi de 7$040 réis o quilo, e queremos vender ganhando uma percentagem de 12 % sôbre o preço de custo. A que preço devemos vender o quilo de aço?

Temos que raciocinar diferentemente ao caso anterior, pois por cada 100$000 réis que vendemos, nosso custo tem que ser de 88$000 réis sòmente, ou seja:

(100 — 12 = 88) e por conseguinte cada 7$040 deve representar-nos 7$040 : 0$880 que operando temos:

7$040 : 0$880 = 8$000

ou seja preço de venda com lucro de 12 %.

Comprovação:

Preço que devemos vender	8$000
Lucro 12 %	0$960
Preço de custo	7$040

Fiz uma operação de venda de uma mercadoria por 612$500 réis e tinha marcado a mesma com uma percentagem de 6 % de lucro. Qual foi o lucro neto obtido nesta operação?

Nestes problemas deve-se observar e ter muito em conta o que é lucro sôbre o custo ou sôbre a venda, pois se descontarmos o 6 % sòmente, não nos poderá dar idêntico resultado, pois descontando de 100$000 o 6 % dá-nos 94$000 e se a esta quantia acrescentamos o 6 % resulta o seguinte: 94$000 + (94$000 × 6) = 99$640 não sendo portanto 100$000 réis.

Em resumo: o que se trata de procurar é uma quantia tal que juntando-lhe o 6 %, nos dê os 612$500 réis, importância da operação de venda.

Vamos raciocinar dizendo: Se o custo da mercadoria fôsse 100$000 réis, teria que vendê-la pelo valor de 106$000 réis e como tenho vendido 612$500, o custo será 612$500 : 106; então 612$500 : 106 e multiplicando por 100 $= \frac{61250}{106}$ e simplificando dividindo por 2 $= \frac{30625}{53}$ = 577$830.

Agora diremos:

Obtido da venda	612$500 réis
Custava	577$600 réis
Lucro neto	34$900 réis

TABELA PARA CALCULAR OS DIAS COMPREENDIDOS ENTRE DUAS DATAS.

	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio	Junho	Julho	Agôsto	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
Janeiro	365	331	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334
Fevereiro	334	365	28	59	89	120	150	181	212	242	273	303
Março	306	337	365	31	61	92	122	153	184	214	245	275
Abril	275	306	334	365	30	61	91	122	153	183	214	244
Maio	245	276	304	335	365	31	61	92	123	153	184	214
Junho	214	245	273	304	334	365	30	61	92	122	153	183
Julho	184	215	243	273	304	335	365	31	62	92	123	153
Agôsto	153	184	212	243	273	304	335	365	31	61	92	122
Setembro	122	153	181	212	243	273	303	334	365	30	61	91
Outubro	92	123	151	182	212	243	273	304	335	365	31	61
Novembro	61	92	120	151	181	212	242	273	304	334	365	30
Dezembro	31	62	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365

Com a ajuda desta tabela podemos encontrar a quantidade de dias que há entre duas datas iguais de meses diferentes. Um caso prático nos fará ver a utilidade e simplicidade da verificação. Seja averiguar quantos dias vão do 2 de abril até 25 de outubro do mesmo ano. Procuremos na coluna vertical o mês de abril e na horizontal outubro e vemos na última escrito 183, que é a diferença entre os dois meses para um mesmo dia. Agora de 2 a 25 vão 23 que somamos com 183 dando como resultado 206 dias que são os que há entre 2 de abril e 25 de outubro.

POTENCIAÇÃO

Conhecendo as regras da multiplicação abreviada, explicadas anteriormente, nos será fácil elevar ao quadrado, cubo etc., qualquer número, com menos esfôrço que se o fizéssemos pelo método usual, tomando como fator o número tantas vezes como nos indica o grau da potência.

Seja elevar ao quadrado o número 84 ou seja: 84×84.

Dispõe-se assim a operação:

$$\begin{array}{r} 84 \\ \times 84 \\ \hline 7056 \end{array}$$

dizendo 4×4 = 16, escrevemos 6 e vai 1, duplo de 4×8 = 64 (porque são dois produtos parciais iguais) mais 1 que são 65; escrevemos 5 e vão 6, que como 8×8 = 64 que com 6 formam 70 que escrevemos integralmente, por ser o final. Resultado definitivo: 7056.

Se fôsse elevar ao cubo, seria multiplicar o número três vezes por si mesmo.

Exemplo: 84×84×84.

Como temos o resultado de 84×84 que é igual a 7056, agora multiplicaremos êste por 84.

Dispõe-se assim a operação:

$$\begin{array}{r} 7056 \\ \times 84 \\ \hline 592704 \end{array}$$

Diremos: 4×6 = 24; escrevemos 4 e vão 2. Agora, 4×5 = 20, mais 2 são 22, mais 8×6 = 48 que somam 70; escrevemos o 0 e

vão 7, e dizemos: 4×0 = 0 que com 7 são 7, mais 8×5 = 40, formam 47; escrevemos o 7 e vão 4; agora, 4×7 = 28 mais 4 são 32 que com 8×0 = 0 são 32; escrevemos 2 e vão 3 que com 8×7 = 56 formam 59; que escrevemos como final, sendo assim o cubo de 84 igual a 592704.

Agora elevemos ao quadrado o número 234.

$$\begin{array}{r} 234 \\ \times 234 \\ \hline 54756 \end{array}$$

Diremos: 4×4 = 16, escrevemos 6 e vai 1. Duplo de 4×3 = 24 mais 1 são 25, escrevemos 5 e vão 2; duplo de 4×2 = 16 com mais 2 que levamos são 18, mais 3×3 = 9 que com 18 formam 27, escrevemos 7 e vão 2; duplo de 3×2 = 12 mais 2 que levamos são 14, escrevemos 4 e vai 1; agora, 2×2 = 4 que com 1 que levamos são 5 que escrevemos como final, sendo o resultado 54756.

Para elevá-lo a 3.ª potência teremos:

$$\begin{array}{r} 54756 \\ \times 234 \\ \hline 12812904 \end{array}$$

Diremos:

1.° 4×6 = 24, escrevemos o 4 e levamos 2;

2.° 4×5+3×6+2 que levamos igual a 40, escrevemos o 0 e levamos 4;

3.° 4×7+2×6+3×5+4 que levamos igual a 59, escrevemos o 9 e levamos 5;

4.° 4×4+2×5+3×7+5 que levamos igual a 52, escrevemos o 2 e levamos 5;

5.° 4×5+2×7+3×4+5 que levamos igual a 51, escrevemos o 1 e levamos 5;

6.° 3×5+2×4+5 que levamos igual a 28, escrevemos o 8 e levamos 2, e

7.° e último 2×5+2 que levamos igual a 12, escrevemos tudo por ter terminado a operação.

Poderíamos usar o mesmo procedimento se tivéssemos que calcular qualquer potência elevada a maior grau, tomando o número tantas vezes como fator, quantas nos indicasse dito grau.

Veja-se um exemplo: Seja encontrar o resultado de $123^6 =$

$$123 \times 123 \times 123 \times 123 \times 123 \times 123 = 3462825991689$$

Para elevar a uma potência um número formado pela unidade seguida de zeros, se escreve a unidade seguida de tantos zeros quantos zeros tenha dito número multiplicados pelo grau da potência.

Exemplo:

100^2, seu resultado é
10000 ou seja quatro zeros

porque 2 zeros que tem o número 100, multiplicado por 2 (grau) são quatro zeros.

Outro exemplo:

1000^5, escrevemos como resultado
1000000000000000 ou seja

3 zeros $\times$ 5 (grau) = 15 zeros, conforme escrevemos acima.

Quando no lugar de ser a unidade seguida de zeros, fôr outro número seguido de zeros, também se elevaria ou elevariam a potência requerida a cifra ou cifras significativas e se seguem depois a regra dos zeros.

Exemplo:

80^2, diremos
$8 \times 8 = 64$ e ainda

um zero $\times$ 2 (grau) = 2 zeros que agregaremos a 64 como segue
6400 sendo êste o resultado.

Outro exemplo:

125000^3, diremos
$125 \times 125 \times 125 = 1953125$, e ainda

três zeros por 3 (grau) = 9 zeros que agregaremos a 1953125 como segue

1953125000000000

sendo êste o resultado.

O resultado de uma potência de qualquer número é tomá-lo como fator tantas vezes como nos indica o grau da potência.

Exemplo:

235^5

Então o número 235 o tomaremos cinco vezes como fator da maneira seguinte:

$$235 \times 235 \times 235 \times 235 \times 235 = 716703146875$$

que é o resultado.

Explicamos que o quadrado de uma soma $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$ e aplicando-o a um número por exemplo:

65 (decompondo-o) temos

$(60 + 5)^2 = 60^2 + 2 \times 60 \times 5 + 5^2 = 3600 + 600 + 25 = 4225$ e fazendo a
a b

operação abreviada temos:

$$\begin{array}{r} 65 \\ \times\ 65 \\ \hline 4225 \end{array}$$

Operando dizemos: $5 \times 5 = 25$, escrevemos o 5 e levamos 2; agora $5 \times 6 = 30$ mais 2 que levamos 32 mais $5 \times 6 = 30$ somam 62, escrevemos 2 e levamos 6 e agora $6 \times 6 = 36$ mais 6 que levamos 42 que escrevemos como resultado definitivo.

Operando poderíamos ter reduzido mais o cálculo, porque se repete 5×6 e 6×5 que é igual a duplicá-los; então, podíamos ter feito a operação assim: $5 \times 5 = 25$, escrevemos 5 e vão 2 agora 2 vezes $5 \times 6 = 60$ mais 2 que levamos 62, escrevemos o 2 e vão 6, e agora $6 \times 6 = 36$ mais 6 que levamos são 42 sendo o resultado 4225.

Em todos os cálculos com potências podemos fazer uso dêste processo, porque todo número, pode considerar-se como uma soma e decomposta, como temos feito.

2.ª POTÊNCIA DE NÚMEROS COMPOSTOS CUJOS ALGARISMOS DE QUALQUER ORDEM SEJA 1

Para números até de nove algarismos todos 1.

REGRA. Conta-se a quantidade de números 1 que tenha o número proposto e escreve-se fazendo com êle séries decrescentes a esquerda e direita do número escrito até a unidade.

Vejamos um caso prático:

Seja multiplicar 11^2 rápido e ainda mentalmente. Contamos os algarismos 1 que tem a quantidade, que neste caso são dois; escrevemos então o número 2 e pomos um número 1 em cada lado assim:

1 2 1 ou seja a série decrescente por ambos os lados do dois sendo êste o resultado de 11^2.

Outro exemplo: Seja 111^2.

Contamos e temos três números 1. Escrevemos o número 3 e depois a cada um dos lados dêle, a série decrescente 2, 1, dando como resultado final

12321

ou seja o valor de 111^2.

Vejamos agora outro exemplo: 1111^2.

Contamos os números 1 e temos quatro. Escrevemos 4 e a cada um dos lados a série decrescente 3, 2, 1, o que dá como resultado final

1234321.

Outro caso: Seja 11111^2.

Contamos e vemos que há cinco números 1. Escrevemos o 5 e agora colocamos a série assim: 1234 5 4321 e por conseguinte:

$$11111^2 = 123454321$$

sendo êste o resultado.

2.ª POTÊNCIA DE QUANTIDADES CUJOS ALGARISMOS SEJAM TODOS NÚMERO 9.

REGRA. Conta-se o número de algarismos 9 e escreve-se, um menos à continuação o número 8; depois tantos zeros menos 1 como algarismos tem a quantidade proposta e como final o algarismo 1.

Exemplo prático: 99^2:

99^2 tem dois algarismos 9, então escrevemos assim: $99^2 = 9$ ou seja um nove menos; depois o número 8 e vai gerando-se assim:

$$99^2 = 98$$

agora tantos zeros como algarismos tem o 99 menos 1, como segue:

$$99^2 = 980$$

e como final e para completar agrega-se-lhe um número 1 sendo o resultado:

$$99^2 = 9801$$

Seja 999^2, por outro procedimento.

Tem três algarismos número nove, então escrevemos um menos ou sejam dois assim: 99. ¡Agora igual quantidade de zeros, deixando um espaço

99 00

e entre estes noves e zeros, no espaço deixado, escrevemos o número 8 que dá

99800

e como final agregaremos o número 1 asim:

998001

que é o resultado da 2.ª potência de 999.

Também pode enunciar-se a regra da maneira seguinte:

Escrevem-se tantos noves, menos um, como números nove tem a quantidade que queremos elevar ao quadrado; à continuação deixando um espaço, igual quantidade de zeros e no espaço deixado entre os noves e os zeros o número 8 e como final de resultado o número 1.

Observe-se que os números 8 e 1 são o produto de 9×9.

Caso prático desta regra seja 99999^2. Temos cinco números nove de maneira que escrevemos quatro dêles ùnicamente; 9999 e a continuação deixando um espaço igual quantidade de zeros: assim

9999 0000

Agora entre os noves e os zeros o número 8; desta maneira

999980000

E como final agregaremos o número 1 atrás de todos os algarismos, da seguinte forma:

9999800001

sendo êste o resultado definitivo.

RAÍZES

Conhecendo de memória os cubos dos nove primeiros algarismos, podemos extrair a raíz cúbica de números até seis algarismos que sejam cubos perfeitos.

Os cubos são:

Dígitos	Cubos	Terminação do n.º cuja raíz dêva-se extrair	Valor da base que corresponderá ao resultado nas unidades
1	1	se é em 1	1
2	8	" " " 2	8
3	27	" " " 3	7
4	64	" " " 4	4
5	125	" " " 5	5
6	216	" " " 6	6
7	343	" " " 7	3
8	512	" " " 8	2
9	729	" " " 9	9

Fazemos a análise das terminações dos cubos e vemos que o fazem com o mesmo número que suas bases o 1, 4, 5, 6 e 9, e que quando suas unidades são 8 e 7 têm por base 2 e 3, e quando 3 e 2 têm por base 7 e 8.

Com estes dados e antecedentes podemos extrair raízes de números de seis algarismos que dimanem de cubo perfeito, dividindo o número proposto em períodos de três algarismos começando pela direita e operando como segue: Seja extrair a raíz cúbica do número 46656:

Dividimos o número em dois períodos por meio de uma vírgula, assim: 46,656 e observamos na tabela anterior, que o primeiro período 46 está compreendido entre 27 e 64. Significa, pois, que deve corresponder 3 como dezenas, que escrevemos. Agora devemos procurar as unidades por análise da terminação do segundo período ou seja 656. Termina em 6, que é como acaba o número base, assim que em definitivo a raiz cúbica é 36.

Efetivamente: 36×36×36 = 46656 como veremos depois de fazer a experiência.

Outro exemplo: 658503.

Ao dividir em períodos temos 658,503.

Começando por analisar o primeiro período vemos que está situado na tabela entre 512 e 729, isto é, entre o 8 e o 9, correspondendo a menor ou seja 8, que escrevemos. A terminação do segundo período 503 é 3 e segundo a tabela sua base o valor é 7, que escrevemos, por ser definitivamente a raiz cúbica, 87.

Vamos agora expor várias operações de raízes para que possa apreciar-se como se desenvolvem e se calculam.

RAIZ QUADRADA

$\sqrt{91049764}$	9542
81	$9^2 = 9 \times 9 = 81$
1004 925	**Tenteio do 2.º número** 2 × 9 = 18, de maneira que tenteando o duplo do n.º 9 já encontrado do número 100 (se separam sempre um algarismo menos que o período para tentear) temos 100 : 18 = 5 e agora 2 × 9 = 185 (pomos o 5 ao lado para multiplicar por 5 mesmo) × 5 = 925.
7997 7616	**Tenteio do 3.º número** 2 × 95 = 190, de maneira que tenteando o duplo do n.º 95, temos 799 : 190 = 4, então 2 × 95 = 1904 (pomos o 4 ao lado, idêntico como anteriormente) × 4 = 7616.
38164 38164	
00000	

Tenteio do 4.º número.

2×954 = 1908, e ao tentear êste duplo do n.º 954, de 3816 temos 3816 : 954 = 2, e prosseguimos operando assim

2×954 = 19082×2 = 38164.

Fazendo o tenteio deve ter-se em conta que se alguma cifra

ao fazer as operações, nos der número maior que o que temos que subtrair, então diminuïremos uma unidade, até que seja possível verificar a operação.

Esta observação serve igualmente para todos os casos de raiz de qualquer índice que apresentamos seguidamente ou que possam calcular-se. Também observamos que em todos os tenteios separamos uma cifra menos das que tem o período começando pela direita.

RAIZ CÚBICA.

```
3
√ 334689043807 | 6943
  216
  ------
  118689
  112509
  ---------
   6180043
   5746384
   ---------
    433659807
    433659807
    ---------
    000000000
```

$6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$ que subtraímos do período 334

Tenteio do 2.° número

$3 \times 6^2 = 108$, ao tentear êste triplo do quadrado do n.° 6 já encontrado do número 1186 (separando duas cifras) temos 1186 : 108 = 9, cujo número calculamos a continuação:

$$3 \times 6^2 \times 9 \times 100 = 97200$$
$$3 \times 6 \times 9^2 \times 10 = 14580$$
$$9^3 = 729$$
$$112509$$

Tenteio do 3.° número

$3 \times 69^2 = 14283$, ao tentear êste triplo do quadrado do n.° 69 temos 61800 : 14283 = 4 e agora

$$3 \times 69^2 \times 4 \times 100 = 5713200$$
$$3 \times 69 \times 4^2 \times 10 = 33120$$
$$4^3 = 64$$
$$5746384$$

Tenteio do 4.° número.

$3 \times 694^2 = 1444908$, e ao tentear êste triplo do quadrado do n.° 694, temos 4336598 : 1444908 = 3 então

$$3 \times 694^2 \times 3 \times 100 = 433472400$$
$$3 \times 694 \times 3^2 \times 10 = 187380$$
$$3^3 = 27$$
$$433659807$$

Como pode observar-se o desenvolvimento completo da operação é igual ao de:

$(a+b)^3$ que nos dá $= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

que temos aplicado na resolução.

RAIZ 4.ª

```
4
√ 137607562890625 | 3425
  81
  -----
  566075
  526336
  ---------
   397396289
   317217296
   -----------
    801789930625
    801789930625
    ------------
    000000000000
```

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

Tenteio do 2.° número

$4 \times 3^3 = 108$, de maneira que tenteando o quádruplo (4) da 3.ª potência do n.° 3 já encontrado temos 566 (três cifras separadas na direita uma menos que o período) : 108 da 5, mas não o empregamos por ser pouco o resto, que não admitiria o desenvolvimento que vamos a ver, e calcularemos com o 4 fazendo o seguinte:

$$4 \times 3^3 \times 4 \times 1000 = 432000$$
$$6 \times 3^2 \times 4^2 \times 100 = 86400$$
$$4 \times 3 \times 4^3 \times 10 = 7680$$
$$4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$$
$$526336$$

Tenteio do 3.° número

$4 \times 34^3 = 157216$, de maneira que tenteando o quádruplo da 3.ª potência do n.° 34 já encontrado temos,

397396 : 157216 = 2, assim que

$$4 \times 34^3 \times 2 \times 1000 = 314432000$$
$$6 \times 34^2 \times 2^2 \times 100 = 2774400$$
$$4 \times 34 \times 2^3 \times 10 = 10880$$
$$2^4 = 16$$
$$317217296$$

Tenteio do 4.º número.

$4 \times 342^3 = 160006752$ de maneira que tenteando o quádruplo da 3.ª potência do n.º 342 já encontrado temos 801789930 : 160006752 da 5 com o qual vamos operar

$$
\begin{array}{lcr}
4 \times 342^3 \times 5 \times 1000 & = & 800033760000 \\
6 \times 342^2 \times 5^2 \times 100 & = & 1754460000 \\
4 \times 342 \times 5^3 \times 10 & = & 1710000 \\
5^4 & = & 625 \\
\hline
 & & 801789930625
\end{array}
$$

RAIZ 5.ª

$\sqrt[5]{72282354809909024}$ | 2354

$$
\begin{array}{r}
72282354809909024 \\
32 \\
\hline
4028235 \\
3236343 \\
\hline
79189248099 \\
73068846875 \\
\hline
612040122409024 \\
612040122409024 \\
\hline
000000000000000
\end{array}
$$

2354

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

Tenteio do 2.º número

$5 \times 2^4 = 80$; e ao tentear êste quíntuplo da potência 4.ª do n.º 2 já encontrada, do n.º 402 (separando 4 cifras = a uma menos que o período) temos 402:80 = 4, mas empregaremos o 3 porque não admite o desenvolvimento que vamos ver e calcularemos com o 3 assim:

$$
\begin{array}{lcr}
5 \times 2^4 \times 3 \times 10000 & = & 2400000 \\
10 \times 2^3 \times 3^2 \times 1000 & = & 720000 \\
10 \times 2^2 \times 3^3 \times 100 & = & 108000 \\
5 \times 2 \times 3^4 \times 10 & = & 8100 \\
3^5 & = & 243 \\
\hline
 & & 3236343
\end{array}
$$

Tenteio do 3.º número

$5 \times 23^4 = 1399205$ e ao tentear em idêntica forma que no 2.º número temos 7918924 : 1399205 = 5 que desenvolveremos assim:

$$
\begin{array}{lcr}
5 \times 23^4 \times 5 \times 10000 & = & 69960250000 \\
10 \times 23^3 \times 5^2 \times 1000 & = & 3041750000 \\
10 \times 23^2 \times 5^3 \times 100 & = & 66125000 \\
5 \times 23 \times 5^4 \times 10 & = & 718750 \\
5^5 & = & 3125 \\
\hline
 & & 73068846875
\end{array}
$$

Tenteio do 4.º número.

$5 \times 235^4 = 15249003125$ e ao tentear 61204012240 : 15249003125 = 4 e ao desenvolver achamos:

$$
\begin{array}{lcr}
5 \times 235^4 \times 4 \times 10000 & = & 609960125000000 \\
10 \times 235^3 \times 4^2 \times 1000 & = & 2076460000000 \\
10 \times 235^2 \times 4^3 \times 100 & = & 3534400000 \\
5 \times 235 \times 4^4 \times 10 & = & 3008000 \\
5^5 & = & 1024 \\
\hline
 & & 612040122409024
\end{array}
$$

Extraímos raízes quadrada, cúbica, quarta e quinta e poderíamos fazê-lo com sexta, sétima, oitava, etc., o que nos daria um resultado exato.

Assinalamos o procedimento geral para que o cultor de números possa exercitar-se na resolução de outros exemplos que lhe sejam de interêsse.

Na prática, para evitar de fazer cálculos extensos, usam-se os logaritmos, ainda que os resultados não sejam exatos (exeção das potências de 10) cuja dificuldade pode subsanar quem os utilizar a seu critério e por aproximação.

À continuação damos, para facilitar o controle, uma pequena tabela de coeficientes binomiais de

$(1+x)^2$, $(1+x)^3$, $(1+x)^4$, $(1+x)^5$, $(1+x)^6$, $(1+x)^7$, $(1+x)^8$, $(1+x)^9$ e $(1+x)^{10}$.

COEFICIENTES BINOMIAIS

$(1+x)^2 = 1+2x+x^2.$

$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3.$

$(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4.$

$(1+x)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5.$

$(1+x)^6 = 1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6.$

$(1+x)^7 = 1+7x+21x^2+35x^3+35x^4+21x^5+7x^6+x^7.$

$(1+x)^8 = 1+8x+28x^2+56x^3+70x^4+56x^5+28x^6+8x^7+x^8.$

$(1+x)^9 = 1+9x+36x^2+84x^3+126x^4+126x^5+84x^6+36x^7+9x^8+x^9.$

$(1+x)^{10} = 1+10x+45x^2+120x^3+210x^4+252x^5+210x^6+120x^7+45x^8$
$+10x^9+x^{10}.$

Nas operações fundamentais operamos com números inteiros a maior parte das vezes, por considerar que, se houver decimais, podem aplicar-se as mesmas regras ou outras pertinentes, tendo em conta as vírgulas na ordem a que correspondem. Nos quebrados e outras operações cremos que os versados operarão para resolvê-los aplicando métodos correspondentes ou explicados, os quais redundarão para êles em benefício de tempo, facilidade, simplicidade e seguridade nas operações.

PROBLEMAS

Damos à continuação uma série de problemas, que são amenos e instrutivos e que cremos possam interessar e servir de estímulo para os afeitos a esta disciplina da ciência.

Ainda que reduzida esta secção, possìvelmente logre satisfazer como nexo e reflexo do que pode fazer-se com o raciocínio e a lógica matemática.

1.º Problema

Duas pessoas que estavam numa praça, viram passar um bando de pombas. Uma delas disse à outra: adeus minhas cem pombas; ao que a outra respondeu: não são 100 pombas as que vão, mas mais outro tanto, mais a metade, mais ¼ parte e mais uma, é que formam as 100 pombas. Pergunta-se. Quantas pombas havia no bando que passava?

SOLUÇÃO

Chamemos x ao número de pombas do bando e formemos a seguinte equação de 1.° grau

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100,$$

efetuando a operação $(x+x)$, teremos $2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100$ e

passando 1 para o segundo membro resulta:

$$2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 100 - 1$$

e efetuando a operação (100 - 1):

$$2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 99$$

e multiplicando por 4 para eliminar denominadores temos

$8x + 2x + x = 396$ e também $11x = 396$ donde

$$x = \frac{396}{11} \text{ resultando que } x = 36$$

logo o número de pombas era **36.**

PROVA

As do bando	36
Outras tantas	36
A metade	18
A ¼ parte	9
Mais 1	1
Total	100

2.º Problema

Epitáfio de Diofante.

A lápide onde Diofante descansa o sono eterno, nos dá o processo da sua vida. Diz assim:

A sexta parte passou-a na infância; 1/12 parte na adolescência; 1/7 parte na juventude; contraíu enlace nessa época e 5 anos após sua espôsa deu-lhe um filho, o qual viveu a metade da vida do pai que sobreviveu ao filho 4 anos. Pergunta-se. Com que idade morreu Diofante?

SOLUÇÃO

Representando por x a idade de Diofante, teremos

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 \text{ e}$$

eliminando denominadores, que conseguiremos multiplicando por 84, encontraremos

$$84x = 14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 \text{ e}$$

passando os termos desconhecidos para o primeiro membro nos dá

$$84x - 14x - 7x - 12x - 42x = 420 + 336 \text{ e}$$

efetuando os cálculos obtemos $9x = 756$, de onde

$x = \frac{756}{9}$ ou seja 84, de maneira que Diofante viveu 84 anos

PROVA

Infância 1/6 parte $= \frac{x}{6} = \frac{84}{6} =$	14 anos
Adolescência 1/12 parte $= \frac{x}{12} = \frac{84}{12} =$	7 anos
Juventude 1/7 parte $= \frac{x}{7} = \frac{84}{7} =$	12 anos
Casados até o nascimento do filho	5 anos
Idade alcançada pelo filho, ($\frac{1}{2}$ de Diofante) $= \frac{x}{2} = \frac{84}{2} =$	42 anos
Diofante sobreviveu ao filho	4 anos
Viveu Diofante	84 anos

Resposta:

Diofante faleceu aos 84 anos.

SOLUÇÃO ARITMÉTICA.

$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} = \frac{33}{84}$; (quando se casou) $\frac{84}{84} - \frac{33}{84} = \frac{51}{84}$; $\frac{51}{84} - \frac{42}{84} = \frac{9}{84}$,

de maneira que $\frac{9}{84}$ deve ser igual a 5+4 ou 9 e também cada $\frac{1}{84}$ = um ano, assim que a idade do pai resulta de 84 anos como foi, pois viveu todo êste tempo.

3.º Problema

Uma senhora levava ao mercado público um cêsto de ovos. Ao cruzar uma rua, foi atropelada por um veículo e naturalmente o cêsto de ovos foi jogado ao solo, quebrando-se grande parte das unidades do conteúdo.

Ao sentir-se atropelada a senhora pôs-se a bradar; por êsse motivo interviu um agente policial das proximidades.

A autoridade pretendeu resolver amigàvelmente êste acidente, pedindo ao condutor do veículo causante do desastre que indenizasse à vítima pelos prejuízos causados, porém, não foi possível em virtude da vítima desconhecer a quantidade de ovos que conduzia.

Resolveu então o policial conduzí-los a presença do Delegado. Esta autoridade, inteirando-se do assunto, foi informada pela vítima que não sabia precisamente a quantidade de ovos contida no cêsto, no entanto informou lembrar-se do seguinte: se contava os ovos de 2 a 2 sobrava 1; se de 3 em 3, idem 1, de 4 em 4 também 1, de 5 em 5 o mesmo 1, de 6 em 6 igualmente 1, porém, se contados de 7 em 7 não sobrava nenhum.

Em virtude do Delegado ser ótimo matemático, declarou não precisar mais informações, pois que, resolveria imediatamente o total de ovos que a referida senhora conduzia no cêsto. Pergunta-se: Quantos ovos continha o cêsto?

SOLUÇÃO

Busquemos o m. c. m. dos números 2, 3, 4, 5 e 6, que são os números divisíveis exatamente pela quantidade de ovos que levava a senhora no cêsto.

Temos pois:

2, 3, 4, 5, 6	2
1, 3, 2, 5, 3	2
3, 1, 5, 3	3
1, 1, 5, 1	5
1, 1	

m. c. m $= 2^2 \times 3 \times 5$ ou $4 \times 3 \times 5 = 60$

Multipliquemos então 60×5 que é o número de vezes em que contados os ovos de 2 a 2, de 3 a 3, de 4 a 4, de 5 a 5, e de 6 a 6 sobrava 1, temos $60 \times 5 = 300$.

Agora bem, como em todas as formas ou maneiras de contar sobrava 1 (a excepção encontrava-se sòmente no de 7 a 7 em que não figura resto algum) acrescente-se a 300 uma unidade e obteremos como final ou resultado $300+1 = 301$, assim que o número de ovos que a senhora levava no cêsto era de 301.

PROVA

$301 \div 2 = 150$	e sobra	1
$301 \div 3 = 100$	" "	1
$301 \div 4 = 75$	" "	1
$301 \div 5 = 60$	" "	1
$301 \div 6 = 50$	" "	1
$301 \div 7 = 43$	e não sobra nada.	

Havia pois no cêsto **301** ovos.

4.º Problema

Um homem caritativo desejando auxiliar aos pobres que estavam na porta de uma igreja, entrou nela e pediu a um santo que lhe fizesse o milagre de dobrar-lhe o dinheiro que trazia, que se isso sucedesse entregaria aos pobres na saída 50$000 réis. Fez-se o milagre e o homem cumpriu a promessa. Entrou novamente na igreja e dirigindo-se a outro santo, pediu o mesmo com resultado favorável, e o homem saindo outra vez da igreja auxiliou novamente com 50$000 aos pobres. Pela 3.ª e 4.ª vez, fez idêntica petição, continuando o milagre e cumprindo êle o prometido. Pergunta-se. Com quanto dinheiro entrou o homem a primeira vez na igreja, se ao sair a última vez, ficou com os bolsos vazios?

SOLUÇÃO

Representemos por x o dinheiro que tinha o homem caritativo ao entrar na igreja, teremos que:

Entra	a 1.ª	vez	com	x	
Sai	a 1.ª	"	"	2 x	
Entra	a 2.ª	"	"	2 x — 50	
Sai	a 2.ª	"	"	4 x — 100	
Entra	a 3.ª	"	"	4 x — 150	
Sai	a 3.ª	"	"	8 x — 300	
Entra	a 4.ª	"	"	8 x — 350	
Sai	a 4.ª	"	"	16 x — 700	e dá aos pobres 50

e fica com os bolsos vazios assim que êste momento vem representado por

$$16\,x - 750 = 0$$

passemos agora o têrmo conhecido ao segundo membro e acharemos $16\,x = 750$ de onde resulta $x = \frac{750}{16} = 46{,}875$ que são 46$875 já que temos operado com unidades representativas de 1$000 cada uma.

Resposta: O homem entrou a 1.ª vez na igreja com **46$875** réis.

PROVA

x	=	46$875
2 x	=	93$750
2 x — 50	=	43$750
4 x — 100	=	87$500
4 x — 150	=	37$500
8 x — 300	=	75$000
8 x — 350	=	25$000
16 x — 700	=	50$000
16 x — 750	=	00$000

Resposta: O homem caritativo tinha ao entrar pela 1.ª vez **46$875** réis.

5.º Problema

Uma moedinha de 1$000 réis posta ao juro composto do 5 % no dia 1.º de janeiro do ano 1 de nossa era; pergunta-se a quanto ascenderia, capital e juros ao terminar o dia 31 de dezembro de 1999, fazendo caso omisso das variações do calendário.

SOLUÇÃO

A fórmula do juro composto é $C = c\,(1+r)^n$,

em que c = capital pôsto a juro composto
" " r = a taxa anual e
" " n = o número de anos.

Substituindo os dados na fórmula anterior temos $C = 1000\,(1+0.05)^{1999}$ que resolveremos por logaritmos, dizendo:

Log. C = log. 1000 + 1999 log. 1.05 e buscando os valores dêsses logaritmos vemos que o log. de 1000 é 3,0000000 e o log. de 1.05 é 0,0211893, assim que:

$$\log. C \begin{cases} \log. 1000 = 3.0000000 \\ 1999 \log. 1.05 = 42.3574107 \end{cases}$$

Em conjunto log. 45.3574107

e buscando o número que corresponde a êste logaritmo (que terá 46 algarismos) obteremos de acôrdo com as tabelas para o valor de C (capital e juros) = 2277250131095962310959623109596231095962310959 réis aproximadamente.

Esta quantia é tão fabulosa que, para dar-nos uma idéia do que representa, — supondo que o nosso planeta fôsse de ouro, — seria possível com ela repartir a cada um dos seus habitantes aproximadamente 25.000 mundos dêste metal.

6.º Problema

São três pessoas A, B e C.

A, diz: "Eu tenho o que o segundo tem e o têrço da parte do terceiro"...

B, diz: "Eu tenho o que tem o terceiro e o têrço da parte do primeiro"...

C, diz: "Eu tenho 10 contos e o têrço da parte do segundo. Pergunta-se: Quanto tinha cada um?

SOLUÇÃO

Se $A = B + \frac{C}{3}$

" $B = C + \frac{A}{3}$

" $C = 10 + \frac{B}{3}$; então

$$B = 10 + \frac{B}{3} + \frac{B + \frac{C}{3}}{3} \text{ ou}$$

$$B = 10 + \frac{B}{3} + \frac{B + \frac{10 + \frac{B}{3}}{3}}{3} \text{ ou}$$

$$B = 10 + \frac{B}{3} + \frac{\frac{9\,B + 30 + B}{9}}{3} \text{ ou}$$

$$B = 10 + \frac{B}{3} + \frac{9B + 30 + B}{27} \text{ ou}$$

$27\,B = 270 + 9B + 9B + 30 + B$ e continuando

$27\,B - 9B - 9B - B = 270 + 30$ e

$8\,B = 300$

$B = \frac{300}{8} = 37.50$ e agora já podemos achar o valor

de $C = 10 + \frac{37{,}5}{3} = 10 + 12.5 = 22.5$ e

$A = 37.5 + \frac{22.5}{3} = 37.5 + 7.5 = 45$ e definitivamente

A tinha 45 contos

B tinha 37 contos e 500 mil réis.

C tinha 22 contos e 500 mil réis.

OUTRA SOLUÇÃO

Representemos A por x
" B " y
" C " z

teremos

$$x = y + \frac{z}{3}$$

$$y = z + \frac{x}{3}$$

$$z = 10 + \frac{y}{3} \quad \text{de onde}$$

$$x - y - \frac{z}{3} = 0 \quad \text{I}$$

$$-\frac{x}{3} + y - z = 0 \quad \text{II}$$

$$-\frac{y}{3} + z = 10 \quad \text{III}$$ e agora multiplicando a

I equação por 3 e a II por 9, para eliminar denominadores e ter os coeficientes de x iguais temos

$$\begin{array}{r} 3\,x - 3\,y - z = 0 \\ -3\,x + 9\,y - 9z = 0 \\ \hline 6\,y - 10z = 0 \end{array}$$ (I resultante)

Agora comparando a I resultante com a III equação, multiplicando issa primeiramente por 18

$$6y - 10z = 0$$
$$-6y + 18z = 180 \quad \text{e operando}$$

$$8z = 180 \quad \text{de onde}$$

$$z = \frac{180}{8} = 22.5$$

Substituindo (na I resultante) z por seu valor temos

$$6y - 10(22.5) = 0$$
$$6y = 225;$$
$$y = \frac{225}{6} \quad \text{ou}$$
$$y = 37.5$$

Substituindo na I equação y e z pelos seus valores, nos dá

$$x - 37.5 - \frac{22.5}{3} = 0$$
$$x = 37.5 + 7,5;$$
$$x = 45.$$

PROVA

$$A = B + \frac{C}{3} = 37.5 + \frac{22.5}{3} = 45{:}000\$000$$

$$B = C + \frac{A}{3} = 22.5 + \frac{45}{3} = 37{:}500\$000$$

$$C = 10 + \frac{B}{3} = 10 + \frac{37.5}{3} = 22{:}500\$000$$

De maneira que a resposta é que

A tinha 45:000$000
B " 37:500$000
C " 22:500$000

7.º Problema

Compramos uma garrafa e uma rôlha, em separado. Juntas nos custaram 1$100 réis, sendo que a garrafa custou 1$000 mais do que a rôlha. Pergunta-se. Quanto custou a garrafa e quanto a rolha?

SOLUÇÃO

Seja x o preço da garrafa. Seja y o preço da rôlha.

Teremos:

$$x + y = 1\$100 \text{ réis} \quad (1)$$

A garrafa custou 1$000 mais do que a rôlha, logo

$$x = 1\$000 + y$$

Sustituindo na igualdade (1), x pelo seu valor

$$1\$000 + y + y = 1\$100, \text{ de onde}$$
$$2y = 1\$100 - 1\$000$$

que nos dá para

$$y = \frac{\$100}{2} = 0\$050$$

logo $x = 1\$000 + 0\$050 = 1\$050$ réis.

Resposta. A garrafa custou 1$050 réis. A rôlha custou 0$050 réis, que concorda com os dados do problema, pois garrafa e rôlha conjuntamente custaram 1$100 réis.

OUTRA SOLUÇÃO

x = garrafa
y = rôlha; então (segundo o problema)
$$x + y = 1\$100$$
$$x = 1\$000 + y$$
em cuja primeira equação nos dá

$y = 1\$100 - x$ e aplicando o valor de y na segunda equação teremos

$x = 1\$000 + 1\$100 - x$ e passando os termos desconhecidos ao primeiro membro

$$x + x = 1\$000 + 1\$100 \text{ de onde}$$
$$2x = 2\$100 \text{ e}$$
$$x = \frac{2\$100}{2} \text{ e para}$$
$$x = 1\$050$$

e como $x = 1\$100 - y$ ou pondo o valor de x.

$1\$050 = 1\$100 - y$. resulta para

$$y = 0\$050 \text{ logo o resultado é}$$
$$x = (\text{garrafa}) = 1\$050$$
$$y = (\text{rôlha}) = 0\$050.$$

8.º Problema

Eu tenho o dôbro da idade que tu tinhas, quando eu tinha a idade que tu tens; quando tu tiveres a idade que eu tenho, nós dois juntos teremos 54 anos. Que idade temos atualmente?

Eu tenho 30 anos. Tu tens 24 anos.

Uma forma de solução:

$$2x = \text{minha idade atual.}$$
$$x = \text{idade que tu tinhas.}$$
$$\frac{3x}{2} = \text{idade que tu tens}$$

$$2x + \left(2x + \frac{x}{2}\right) \text{ (diferença de idade)} = 54 \text{ anos}$$

logo

$$2x + 2x + \frac{x}{2} = 54 \text{ (multiplicando por 2 para eliminar o denominador)}$$

ou ainda

$$9x = 108$$

e por conseguinte

$$x = 12$$

$2x = 24$ que é a minha idade atual.

$\frac{3x}{2} = 18$ ou seja tua idade presente.

Em definitivo:

Tu tens 18 anos e eu tenho 24 anos, de modo que quando tu tiveres minha idade ou seja 24 anos, terão passado 6 anos e eu terei 30, o que em conjunto será 54 anos. Assim definitivamente tu terás 24 anos e eu 30 igual a 54 anos que era o que queríamos demonstrar.

9.º Problema

Temos 100 moedinhas de um mil réis, com as quais queremos comprar pardais que custam 50 réis cada um, pintassilgos a 1$000 réis e sabiás a 5$000 respectivamente. Desejando comprar um total de 100 pássaros, pergunta-se: Quantos passarinhos podemos comprar com as 100 moedinhas?

Seja x o número dos pardais; y o número dos pintassilgos e z o número dos sabiás.

Como a soma dos pássaros é 100 temos para a primeira equação:

$$x + y + z = 100 \quad \text{(I)}$$

Custando os pardais 50 réis cada um, os x pardais custam 50 x;

Custando os pintassilgos 1$000 réis cada um, os y pintassilgos custam 1000 y;

Custando os sabiás a 5$000 cada um, os z sabiás custam 5000 z.

Como o lote de passarinhos custa 100$000 réis temos para a 2.ª equação:

$$x + y + z = 100$$
$$50x + 1000y + 5000z = 100000 \quad II$$

Simplificando a 2.ª equação: por 50, temos

$$x + y + z = 100$$
$$x + 20y + 100z = 2000$$

Subtraindo a primeira da segunda, obtemos,

$$19y + 99z = 1900$$

$$y = \frac{1900 - 99z}{19} = 100 - \frac{5}{z} + \frac{-4z}{19}$$

e fazendo o resto $\frac{-4z}{19} = t$ e continuando para achar o valor de z;

$$z = \frac{-19t}{4} = -4t + \frac{-3t}{4} \quad e$$

fazendo $\frac{-3t}{4} = t'$; $t = \frac{-4t'}{3} = -t' + \frac{-t'}{3}$ e

fazendo ainda $\frac{-t'}{3} = t''$; $t' = -3t''$

Se $t' = -3t''$, $t = 4t''$ temos que $z = -19t''$, e $y = 100 + 99t''$ de onde $x = 100 - 100 - 99t'' + 19t'' = -80t''$.

Portanto

$$x = -80t''$$
$$y = 100 + 99t''$$
$$z = -19t''$$

Todas as três desconhecidas (incógnitas) estão dependendo do valor de t'' para que obtenhamos valores numéricos para o resultado do problema.

Portanto, começando a dar para t'' o valor de zero, teremos para, x e z, valores negativos que não satisfazem ao problema.

Assim também, se nós déssemos para t'' o valor de — 1, encontraríamos

$$x = 80$$
$$y = 1$$

$z = 19$, única solução para o caso em questão. Valores para t'' menores que — 1, não solucionam o problema a-pesar-de solucionar as equações armadas. Dêste modo os Pardais eram 80, Pintassilgos 1 e Sabiás 19.

OUTRA SOLUÇÃO

Representando por x o número de pardais, por y o de pintassilgos e por z o de sabiás, podemos formar as seguintes equações:

$$50x + 1000y + 5000z = 100000$$
$$x + y + z = 100$$

Dividindo a 1.ª equação por 50 para simplificar, teremos

$$x + 20y + 100z = 2000 \quad e$$

subtraindo da primeira a segunda, obteremos

$$x + 20y + 100z = 2000$$
$$x + y + z = 100$$

$$19y + 99z = 1900 \quad e$$

dando a y o valor de 1 (o menor número inteiro), obteremos

$$y = 1; \quad 19y = 19$$
$$99z = 1900 - 19 \text{ ou } 1881; \quad z = 1881 \div 99 = 19$$
$$x = 100 - 1 - 19 \text{ ou } 80.$$

Podemos comprar pois com 100 moedinhas, 100 pássaros, como segue:

Pardais	80
Pintassilgos	1
Sabiás	19
Total	100

PROVA

x = 80	pardais	a 0$050 réis =	4$000 réis
y = 1	pintassilgo	a 1$000 réis =	1$000 réis
z = 19	sabiás	a 5$000 réis =	95$000 réis
Em conjunto 100	passarinhos	por	100$000 réis (100 moedinhas)

10.° Problema

Três jogadores combinaram em que jogariam 3 partidas de um determinado jôgo com a condição de que o que perdesse duplicaria o dinheiro aos outros dois. Postos de acôrdo jogaram 3 partidas que perderam sucessiva e correlativamente e ao finalizar encontraram-se cada um com 24$000 réis. Pergunta-se quanto dinheiro tinha cada um dos jogadores quando começaram as 3 partidas?

Representemos por x, y e z o que cada jogador tem.

	Antes do jôgo	Ao terminar a 1.ª partida
1.°	x	x — y — z
2.°	y	2 y
3.°	x	2 z

Ao terminar a 2.ª partida	Ao finalizar a 3.ª partida
2 (x — y — z)	4 (x — y — z)
2 y — 2 z — x + y + z	2 (2 y — 2 z — x + y + z)
4 z	4z — 2x + 2y + 2z — 2y + 2z + x — y — z

Ou quando terminam a terceira partida

1.° 4 (x — y — z)
2.° 2 (3y — x — z)
3.° 7z — y — x

e como cada jogador ficou com 24$000 réis, temos as 3 equações seguintes:

$$4x - 4y - 4z = 24\$000$$
$$-2x + 6y - 2z = 24\$000$$
$$-x - y + 7z = 24\$000 \quad e$$

resolvendo-as temos

$$x = 39\$000$$
$$y = 21\$000$$
$$z = 12\$000$$

RESOLUÇÃO ARITMÉTICA

Raciocinemos à inversa, quer dizer, começando pela situação dos jogadores na 3.ª partida e analisando-a até a 1.ª partida.

Quando terminaram a 3.ª partida, cada jogador ficou com 24$000 réis e como o 3.° é o que perde a última partida obtemos que cada um dos outros jogadores naquele momento tinham 12$000 e o terceiro tinha então 48$000 réis. Se antes foi o 2.° que perdeu a partida e dobrou o dinheiro do 1.° e do 3.° significa que antes de finalizar esta segunda partida o 1.° tinha 6$000 réis o 3.° 24$000 e o 2.° 42$000 réis e observando esta relação em quanto a primeira partida jogada, que perdeu o 1.° jogador (3.ª começando á inversa) podemos já determinar que antes de começar o jôgo o 1.° dispunha de 39$000 réis, o 2.° de 21$000 réis e o 3.° de 12$000 réis.

$$x = 39\$000$$
$$y = 21\$000$$
$$z = 12\$000$$

De maneira que ao começar a partida, que é o que pretendíamos averiguar o 1.° jogador tinha 39$000; o 2.° 21$000 e o 3.° 12$000 réis.

Também podemos resolvê-lo da seguinte maneira:

Representemos também por x, y e z o que tinha cada jogador antes de começar o jôgo: temos então que

$$x + y + z = 72\$000 \quad (I)$$

Agora bem; o primeiro jogador que tinha x na primeira partída perdeu o que tinha o 2.° e o do 3.° z, de maneira que lhe ficou

$$x - (y + z)$$

quando terminou a segunda partida arrecadou o dôbro do que lhe restava ou seja

$$2\ [x - (y + z)]$$

e quando finalizou o jôgo na terceira partida, se lhe teve que duplicar o que tinha naquele momento e que vem representado por $2 \times 2\ [x - (y + z)] = 24\$000$ e desenvolvendo $4x - 4y - 4z = 24\$000$ e também $x - y - z = 6\$000$ (II).

Temos pois duas equações com 3 incógnitas e vamos a estabelecer uma terceira.

Quando o 1.° jogador perdeu, o 3.° jogador ficou com 2z, e com 4y, quando perdeu o segundo. De maneira que quando o (3.° jogador) perdeu a 3.ª partida êle tinha 4z. Naturalmente que com as condições que se impuseram os jogadores, quando o 3.° perdeu sua partida teve que duplicar o que naquele instante possuíam os jogadores 1.° e 2.°, que como final de jôgo ficaram 24$000 réis cada um e por conseguinte antes de finalizar esta terceira partida o 1.° e o 2.° tinham 12$000 cada um.

Disto se depreende que se naquele momento o 3.° pagou 12$000 ao 1.° e 12$000 réis ao 2.°, êle tinha ao terminar sua partida 12$000 réis (que deu ao 1.°) mais 14$000 réis que deu ao 2.° e como todos naquele momento ficaram com 24$000 réis, obteremos que êle dispunha de 48$000 réis antes de jogar a 3.ª partida, assim é que:

$4z - 24\$000 = 24\$000$ (III) e agora resolvidas as equações I, II e III resulta

$$\begin{aligned} x + y + z &= 72\$000 \\ x - y - z &= 6\$000 \\ 4z &= 48\$000 \quad \text{de onde} \\ z &= 12\$000 \end{aligned}$$

e agora substituindo z nas outras equações dá

$$\begin{aligned} &\text{I,}\ x + y + 12\$000 = 72\$000 \text{ ou } x + y = 60\$000 \\ &\text{II,}\ x - y - 12 = 6\$000 \text{ ou } x - y = 18\$000 \end{aligned}$$

Do sistema ...... $\begin{cases} x + y = 60\$000 \\ x - y = 18\$000, \end{cases}$ deduzimos

$$\begin{aligned} x &= 18\$000 + y, \text{ e } 18\$000 + y + y = 60\$000 \\ 2y &= 60\$000 - 18\$000 \\ 2y &= 42\$000 \text{ e em definitivo} \\ y &= 21\$000, \text{ o que nos permite encontrar para} \\ x &= 18\$000 + 21\$000 = 39\$000 \end{aligned}$$

tendo finalmente a solução do problema ao encontrar para

x = 39$000 para o 1.° jogador antes de começar o jôgo
y = 21$000 " " 2.° " " " " " "
z = 12$000 " " 3.° " " " " " "

11.° Problema

Um árabe ao morrer deixou 17 camelos para seus três filhos; Abrahão, Salomão e Isac. Ao 1.° deixou-lhe a metade da herança, a terceira parte à Salomão e a nona parte à Isac, e impôs como condição, que quando se partilhasse não se poderia matar nenhum animal. Como puderam repartir a herança os irmãos, já que discreparam imediatamente no ato de distribuí-la?

SOLUÇÃO

O juiz que recebeu a demanda que era muito perspicaz, estudou o assunto e resolveu-o, da seguinte maneira:

Pediu emprestado um camelo a um vizinho e juntou-o com os da herança; formou um lote de 18 animais e começou a reparti-los nesta forma:

a Abrahão $^1/_2$ de 18 tocaram-lhe 9 camelos
a Salomão $^1/_3$ " 18 " 6 "
a Isac $^1/_9$ " 18 " 2 "

Total de camelos repartidos aos 3 herdeiros 17 camelos que eram os que o pai deixou ao morrer, e devolveu o camelo que o vizinho emprestou.

Como pode observar-se pela distribuïção anterior, a divisão que o juiz fez se se quer foi eqüitativa (já que eram os únicos herdeiros) mas não cumpriu exatamente a distribuição de acôrdo com o disposto pelo pai.

E passemos a demonstrá-lo:

Ao testar o pai dispôs para seus filhos, a $1/2$ para o primeiro; a $1/3$ parte para o segundo e a $1/9$ parte da herança para o terceiro cujo conjunto não representa o total para adjudicar todos os 17 camelos.

Efetivamente:

$1/2 + 1/3 + 1/9$ (conjunto para os herdeiros)) $= 9/18 + 6/18 + 2/18 = 17/18$ (I) de maneira que ùnicamente correspondeu aos 3 irmãos o $17/18$ do total (e não poude haver oposição de outros reclamantes por serem êles os únicos herdeiros), assim que, com o $1/18$ do vizinho, foi possível ao juiz entregar a cada herdeiro a sua parte sem matar nenhum animal, e naturalmente resultaram beneficiados cada um em relação à parte que de acôrdo com as disposições do pai, legalmente lhe correspondia.

Observe-se que o número de camelos que herda cada irmão vem representado em I (fazendo a divisão como o do vizinho) pelo numerador de cada quebrado respectivo e o denominador é o número de animais que formaram o lote, e que agregando-se o do vizinho, $1/18$, completam $18/18$ de cujo total repartiram-se aos irmãos $17/18$ ou sejam 17 animais, devolvendo-se um camelo ($1/18$) ao vizinho:

Agora bem: os irmãos segundo o testamento do pai, deviam receber $1/2 + 1/3 + 1/9$ de 17 camelos. De acôrdo com essa disposição, receberiam:

Abrahão	$1/2$ de 17	$= 8\ 1/2$ camelos
Salomão	$1/3$ de 17	$= 5\ 2/3$ camelos
Isac	$1/9$ de 17	$= 1\ 8/9$ camelos
	Total	$16\ 1/8$ camelos

e receberam:

Abrahão	9 camelos
Salomão	6 camelos
Isac	2 camelos
Total ..	17 camelos

por haver-se tomado os $17/18$ não de 17 camelos mas sim de 18, com o que resultaram favorecidos os herdeiros como já explicamos, e assim se completou a diferença que deixou o pai sem dispor dela ao testar.

12.º Problema

O XADREZ

Êste jôgo, chamado também e com muita razão jôgo-ciência, não se sabe verdadeiramente a sua origem, o que produziu muitas lendas. Na China, Pérsia, Índia e outras nações o jogam com outras peças e outros sistemas, que ainda sendo diferentes, parecem orientar-se com similitude ao que nós conhecemos.

Tem diferentes nomes que pelo exóticos não reproduzimos e ùnicamente diremos que os Japoneses o chamam o jôgo do "Stratego" ou do General Shoo.

Como curiosidade vamos explicar uma anedota ocorrida na batalha de Brenneville quando um arqueiro inglês sujeitou o cavalo do Rei Luiz o Gordo, querendo aprisioná-lo e o Rei lhe partiu a cabeça de um machadaço, dizendo-lhe: "Ne sais-tu pas, qu'on ne prend jamais le roi aux échecs" que nós podemos traduzir dizendo: Nunca se toma o Rei no jôgo de xadrez.

Isto demonstra (como na vida) que a realidade neste caso foi diferente do papel que se destina às peças do xadrez, quando Luiz o Gordo esteve em contradição com o aforismo que diz:

"Sendo o Rei a peça principal do xadrez nada pode fazer sem ajuda dos seus súbditos, quando se defendeu tão contundentemente como acabamos de explicar.

Existem muitas lendas sôbre quem foi o inventor dêste jôgo de xadrez.

Uma delas devida ao escritor árabe Asaphad supõe que foi

Sessa um birmane filho de Daher, que foi nomeado professor de um príncipe hindú de nome Scheran.

Outra que vamos contar é dos persas e remonta-se ao século IX, a qual supõe que o inventor do Xadrez foi um hindú, quem, perante o aborrecimento (ou nostalgia) do Rei, a quem não havia possibilidade de tirar do retraïmento, proporcionou-lhe êste meio de distração, tão recreativo e por sua vez tão cheio de combinações e jogadas, que o Soberano, entusiasmado e querendo testemunnhar-lhe "ipso facto" todo seu agradecimento, lhe sugeriu que pedisse qualquer coisa que fôsse de seu desejo para recompensá-lo imediatamente.

O inventor respondeu: "Majestade": Já que é vosso desejo premiar-me, sòmente vos peço que deis ordem para que me entreguem o trigo que possa reünir-se, pondo no tabuleiro do Xadrez, as seguintes quantidades: 1 grão no primeiro quadro, 2 no segundo, 4 no terceiro, 8 no quarto, 16 no quinto, 32 no sexto, 64 no sétimo e assim sucessivamente continuando a duplicar as quantidades até o quadro 64.

O Rei respondeu-lhe: Homem, tenho que apreciar mais ainda tua sabedoria, porque além de seres um grande estrategista, filósofo e matemático, demonstraste com tua simples petição que és muito modesto. Incontinenti firmou um decreto, ordenando a entrega ao inventor da quantidade de trigo que pedia, dando-lhe por O. R. seus agradecimentos e fazendo-o nobre ao mesmo tempo.

Em seguida deu ordem a um pagem para que tomasse uma bolsa de grãos e a levase à casa do inventor, para cumprir com o decreto firmado recentemente e satisfazer assim os desejos do hindú.

Cumpriu o pagem a ordem do Rei e uma vez na casa do inventor começou a pôr 1 grão no primeiro quadro, 2 no segundo, 4 no terceiro, 8 no quarto, etc. Naturalmente, no começo, tudo ia às mil maravilhas, mas, avançando de quadro em quadro, precisavam-se mais grãos de trigo até que o conteúdo do saco terminou, fato pelo qual o Rei mandou que levassem mais uns sacos de grãos, que também foram esgotados. Foi então que o Rei deu-se conta, que a soma era maior do que êle supunha ao começo e mandou levar várias carroças com sacos de trigo que também, foram esvasiados ràpidamente, assim como, foi insuficiente toda a colheita que produziu o reino.

O Rei queria cumprir o que tinha assinado e mandou indagar

nos impérios vizinhos com que quantidade de trigo contavam, recebendo de imediato a resposta.

Foi então que compreendeu que não podia cumprir o que tinha assinado, com o trigo dos seus vizinhos, como também lhe seria impossível comprando todo o trigo do mundo.

Ante tal dificuldade, convocou todos os sábios e matemáticos do Reino, para que calculassem a quanto ascendia a quantidade de trigo que teria de entregar ao sábio hindú. Feitos os cálculos, os matemáticos, com grande assombro, comunicaram ao Rei que a quantidade de grãos que pedia o hindú era a seguinte:

18446744073709515615

Ante êste dilema o Rei teve que pedir e suplicar ao inventor do jôgo de Xadrez que o livrasse de cumprir com a palavra empenhada em troca de toda classe de honrarias além de uma colocação proeminente entre todos os homens do seu reino.

Concordou o hindú em renunciar aos grãos de trigo pedidos e não admitiu do Rei honras nem distinções de classe alguma.

Certamente que o sábio, com a petição que fez ao Rei, quis demonstrar-lhe que a inteligência é a mais poderosa de todas as armas e que contra ela não há fôrça no mundo por maior que seja.

A série de grãos que se vai formando ao colocar um só grão no primeiro quadro ou casa, e dobrando sempre a soma dos subseqüentes, começa, como é natural, por pouco, chegando mais adiante a formar um número fantástico. Efetivamente, na casa 64 a quantidade de grãos era a já anteriormente mencionada de:

$18_5446_4744_3073_2709_1515,615$

Para poder imaginar esta quantia fabulosa e sugerir a possibilidade de formar-se uma idéia do que representa, tenhamos em conta o seguinte: se 1 quilo de trigo contém aproximadamente 2500 grãos, teremos, dividindo 18446744073709515615 por 2500 o número de 7378697629483806 quilos, que divididos por 1000 que tem 1 tonelada nos dá um total de 7378697629483 toneladas (desprezando os restos), e considerando que a colheita mundial de trigo na atualidade, é de umas 120000000 tolenadas, dividindo o número 7378697629483 por 120 milhões teremos como resultado 61489 que nos diz que para satisfazer o pedido de grãos de trigo que foi feito pelo sábio hindú seria preciso entregar-lhe quantias idênticas à da colheita atual, de todo o mundo, durante

61489 anos.

Para demonstrar a certeza de que a soma de grãos é
18446744073709551615
damos a seguir o desenvolvimento da operação prática começando pelo primeiro quadro do tabuleiro dobrando os grãos até terminar no 64.

Eis o número de grãos para cada quadro:

		Soma anterior ..	4294977295
1.º	1	33.º	4294967296
2.º	2	34.º	8589934592
3.º	4	35.º	17179869184
4.º	8	36.º	34359738368
5.º	16	37.º	68719476736
6.º	32	38.º	137438953472
7.º	64	39.º	274877906944
8.º	128	40.º	549755813888
9.º	256	41.º	1099511627776
10.º	512	42.º	2199023255552
11.º	1024	43.º	4398046511104
12.º	2048	44.º	8796093022208
13.º	4096	45.º	17592186044416
14.º	8192	46.º	35184372088832
15.º	16384	47.º	70368744177664
16.º	32768	48.º	140737488355328
17.º	65536	49.º	281474976710656
18.º	131072	50.º	561949953421312
19.º	262144	51.º	1125899906842624
20.º	524288	52.º	2251799813685248
21.º	1048576	53.º	4503599627370496
22.º	2097152	54.º	9007199254740992
23.º	4194304	55.º	18014398509481984
24.º	8388608	56.º	36028797018963968
25.º	16777216	57.º	72057594037927936
26.º	33554432	58.º	144115188075855872
27.º	67108864	59.º	288230376151711744
28.º	134217728	60.º	576460752303423488
29.º	268435456	61.º	1152921504606846876
30.º	536870912	62.º	2305843009213693952
31.º	1073741824	63.º	4611686018427387904
32.º	2147493648	64.º	9223372036854775808
Soma e segue.	4294977295	Soma total	18446744073709551615

Se quiserem resolvê-lo matemàticamente observaremos que se trata duma progressão geométrica cujo primeiro têrmo é 1, a razão é sempre constante 2, e que escrevemos da seguinte forma:

$$\div\div\ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 \ldots\ldots\ldots$$

até terminar 64 quadros do tabuleiro que também podemos expressar assim:

$$\div\div\ 1 : 2 : 2^2 : 2^3 : 2^4 : 2^5 : 2^6 : 2^7 : 2^8 \ldots\ldots 2^{n-1}$$

e como desejamos saber a soma de todos os grãos faremos uso da fórmuda $S = \dfrac{lq-a}{q-1}$, que nos diz que a soma dos termos de uma progressão geométrica limitada (quando a progressão é crescente e $q > 1$) é igual ao produto do último termo pela razão, diminuido do primeiro têrmo e dividido o resultado pela diferença que há entre a razão e a unidade.

Vamos calcular o total de grãos aplicando a fórmula escrita pelo que substituímos as letras pelos seus valores que podemos calcular exatos por ter sabido já o valor do quadro 64 que é 9223372036854775808

$$S = \frac{9223372036854775808 \times 2 - 1}{2 - 1} =$$

$$S = \frac{18446744073709551616 - 1}{1} \quad \text{e}$$

como soma definitiva o resultado

$$S = 18_5 446_4 744_3 073_2 709_1 551{,}615$$

que está de acôrdo e exatamente igual com o desenvolvimento prático.

Por logaritmos é aproximado, como se vê pelo que indicamos na continuação:

Referindo-nos a forma anotada anteriormente de

$$S = \frac{l\,q - a}{q - 1}$$

temos desconhecido o valor do último têrmo l, a é o primeiro e q a razão que vemos indicar como se calcula, para substituí-lo de idêntica maneira que no caso numérico.

Sabemos que um têrmo de uma progrssão geométrica (neste caso o último) é igual ao primeiro multiplicado por uma potência da razão cujo expoente é igual ao número de termos que lhe precedem, pelo que temos

n — 1 no que n é o número de termos

$$l = a\, q^{n-1}$$

e aplicando logaritmos temos

log. l = log. 1 + 63 log. 2 de onde
log. l = 0.00000 + 63 × 0.30103 e
log. l = 0.00000 + 18.96489;
log. l = 18.96489 que ao calcular nos dá aproximadamente
log. l = 9223400000000000000, = 19 cifras (uma mais que a caracteristica do logaritmo) e aplicando na fórmula $S = \dfrac{l\,q - a}{q - 1}$ nos dá quase idêntica quantidade que é o que queríamos demonstrar para corroborar a finalidade dos cálculos feitos e resultados obtidos.

Ei-lo aquí substituindo

$$S = \frac{9223400000000000000 \times 2 - 1}{2 - 1}$$

e como final

S = 18446799999999999999

como soma total o resultado, quase de acôrdo ao real já calculado, mas como está obtido por logaritmos, estes dão valores aproximados, quando não são potências de 10.

REPETIÇÃO DE PERÍODOS

Ao multiplicar

```
142857
   × 2
------
285714
```

temos como resultado as mesmas cifras do multiplicando transpostas.

Ao multiplicar por 3 temos:

```
142857
   × 3
------
428571
```

sempre as mesmas cifras transpostas.

Ao multiplicar por 4 temos:

```
142857
   × 4
------
571428
```

iguais algarismos transpostos.

Ao multiplicar por 5 temos:

```
142857
   × 5
------
714285
```

ocorre a mesma coisa sendo os mesmos algarismos

Agora temos:

```
142857
   × 6
------
857142
```

Nesta operação de multiplicar por 6 o caso é mais curioso ainda, porque as últimas cifras do multiplicando tomam o lugar das três primeiras.

Não é tudo; êsses algarismos do número proposto: 1, 4, 2, 8, 5 e 7 incomodados de serem sempre os mesmos nas cinco operações parecem gritar: "Multipliquem-nos agora por 7". Novo surpreza. As seis cifras desaparecem por encanto. O producto é 999999.

$$\begin{array}{r} 142857 \\ \times\ 7 \\ \hline 999999 \end{array}$$

Efetivamente por 7 nos dá como resultado todos algarismos 9.

Poderíamos continuar expondo infinidades de combinações para a qual se presta êste número mas cremos serem suficientes as já expostas.

Faz muito tempo que êste número chamou a atenção e a curiocidade dos científicos cultores dos números, tendo sido estudado e analisado com empenho, com resultados muito surpreendentes e que explicaram perfeitamente a periodicidade de tantos resultados.

MULTIPLICAÇÃO COMBINADA.

Com facilidade podemos obter no resultado da multiplicação qualquer série de números dígitos.

Para isto é preciso tomar como multiplicando os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 9, e como multiplicador, tantas vezes 9, quantas unidades contenha um algarismo da série de números que desejarmos, como pràticamente demostramos:

Queremos de resultado o algarismo 1, então $1 \times 9 = 9$, de modo que multiplicaremos o número 12345679 por 9 e darnos-á todos algarismos 1. Veja-se um caso prático:

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \times\ 9 \\ \hline 111111111 \end{array}$$

querendo então que sejam todos os algarismos 2 faremos assim $2 \times 9 = 18$.

Demonstração prática:

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \times\ 18 \\ \hline 98765432 \\ 12345679 \\ \hline 222222222 \end{array}$$

Para que sejam algarismos 3, faremos assim: $3 \times 9 = 27$ e depois:

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \times\ 27 \\ \hline 86419753 \\ 24691358 \\ \hline 333333333 \end{array}$$

e assim até o número 9.

COM OS DÍGITOS EMPREGADOS UMA SÓ VEZ OBTER UM RESULTADO QUE SEJA 100.

Vamos demonstrar esta curiosidade, dizendo que, empregando os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 uma vez só cada um dêles, quer sejam somados, subtraídos, multiplicados ou divididos como potências ou como raízes, o resultado será 100.

Êste problema é muito fácil, sendo também dificílimo, se não o focarmos bem: Efetivamente é questão de sinais; escrevemos como segue: $123 - 45 - 67 + 89$ onde estão representados como bem pode ver-se todos os algarismos digitos.

Se verificarmos as operações vemos que seu resultado é igual a 100 como mencionamos. Efetivamente:

$$123 - 45 = 78 - 67 = 11 + 89 = 100$$

OS NÚMEROS 37 e 73

Se multiplicarmos o primeiro sucessivamente pela série de números 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 e 27 teremos: 37×3 = 111; 37×6 = 222; 37×9 = 333; 37×12 = 444; 37×15 = 555; 37×18 = 666; 37×21 = 777; 37×24 = 888 e 37×27 = 999.

quer dizer que nos dá sucessivamente como resultado so números dígitos repetindo até a terceira ordem.

O NÚMERO 73.

Se operarmos com êste número multiplicando-o sucessivamente pela mesma série teremos: 73×3 = 219; 73×6 = 438; 73×9 = 657; 73×12 = 876; 73×15 = 1095; 73×18 = 1314; 73×21 = 1533; 73×24 = 1752 e 73×27 = 1971.

por cujas multiplicações vemos que suas terminações são a série dos dígitos em ordem decrescente.

OUTRO CASO ESPECIAL.

Sejam os números:

999999 × 9 = 8999991
999999 × 8 = 7999992
999999 × 7 = 6999993
999999 × 6 = 5999994
999999 × 5 = 4999995
999999 × 4 = 3999996
999999 × 3 = 2999997
999999 × 2 = 1999998
999999 × 1 = 999999

por cujo resultado vemos que somada a cifra da ordem superior com a cifra da ordem inferior dão-nos 9 em todos êles e não pode ser de outra maneira por ser múltiplo de 9, e que os algarismos da ordem superior e inferior estão em série decrescente e crescente respectivamente.

DADO UM NÚMERO DE TRÊS ALGARISMOS E REPETINDO-O, FORMANDO UMA QUANTIA SÓ, DECOMPÔ-LO DIVIDINDO SUCESSIVAMENTE POR 7, 11 e 13 PARA TER COMO ÚLTIMO QUOCIENTE O NÚMERO PROPOSTO.

Seja o número 682 que repetimos assim:

682682

que dividindo por 7, 11 e 13 sucessivamente teremos:

dando por quociente 682 que é o número proposto e que controlamos.

Vejamos o porque dêste resultado: temos que escrevendo 682 ao lado do 682 proposto, forma-se o número 682682, eqüivalente a

682 × 1000 igual 682000
mais 682 que ajuntamos 682
682682

de modo que o número 682 é multiplicado por 1000 mais 1 ou seja igual a 1001, e como dividimos 682682 sucessivamente por 7, por 11 e por 13 cujo produto é igual a 1001, o quociente final tem que ser 682 que é o que queríamos demonstrar.

Isto ensina-nos que podemos abreviar as operações de dividir, (quando seja possível) decompondo o divisor em vários fatores e tomando estes como divisores.

Vejamos um caso prático: Seja dividir o número:

2501415 : 945 seu resultado é

```
2501415 | 945
        |-----
6114      2647
 4441
  6615
   000
```

Dividamos agora:

2501415 por fatores do número tais como 3, 5, 7 e 9 igual 945 obteremos o mesmo resultado 2647. Veja-se pràticamente:

```
       2501415
1/3 ----------
        833805
1/5 ----------
        166761
1/7 ----------
         23823
1/9 ----------
          2647
```

que é o que queríamos demonstrar.

COMBINAÇÕES NUMÉRICAS

$0 \times 9 + 1 = 1$
$1 \times 9 + 2 = 11$
$12 \times 9 + 3 = 111$
$123 \times 9 + 4 = 1111$
$1234 \times 9 + 5 = 11111$
$12345 \times 9 + 6 = 111111$
$123456 \times 9 + 7 = 1111111$
$1234567 \times 9 + 8 = 11111111$
$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$
$123456789 \times 9 + 10 = 1111111111$

COMBINAÇÕES NUMÉRICAS

$1 \times 8 + 1 = 9$
$12 \times 8 + 2 = 98$
$123 \times 8 + 3 = 987$
$1234 \times 8 + 4 = 9876$
$12345 \times 8 + 5 = 98765$
$123456 \times 8 + 6 = 987654$
$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$
$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$
$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$

HISTORIAL NUMÉRICO

(de 1 a 10)

Quase todos os números têm a sua legenda que os distingue dos outros por seu "fatalismo" ou por seu "divinismo" particular. A história não pode dar-nos acêrca dêste ponto razões de importância; não faz senão surtir-nos de dados curiosos ou de anedotas imprecisas, de muita escassa transcendência, incapazes de servir-nos para um estudo definitivo.

I

Pode dizer-se que o númreo 1. ou seja a unidade, carece de história por completo. Nos jeroglíficos egípcios vemos que a unidade estava representada gràficamente por um dedo humano direto ou levantado em sentido vertical, dedo que logo, a causa de sucessivas sumplificações acabou por ser um pau ou uma barra qualquer. Observe-se que também o representavam assim as escrituras árabes, turcas e chinesas. Os hebreus, gregos e sírios lhe davam a mesma figura da primeira letra de seu alfabeto.

Conforme textos, o célebre Pitágoras havia feito da unidade a representação da divindade, que tudo contém e da qual tudo deriva. De sua teoria se desprende que a unidade (monade) ninguém a criou porque ela mesma é Deus, princípio ativo, opos-to ao número dos (dyade), princípio passivo. Outro fisósofo, Plotin, da escola de Alexandria assegura que o **Uno** é a inteligência universal.

II

O número 2 tem, antes de tudo, a particularidade de ser o primeiro dos números pares, e sendo o primeiro dos números pares, e todos os primeiros sendo de ordem ímpar, também 2 é de ordem ímpar. Os romanos dedicaram a Plutão o segundo mês de seu calendário, e o segundo dia do mesmo a seus mortos. Conforme Pitágoras, o número 2 é o símbolo da justiça, como um número divizível por dois.

III

O 3 é o número mais venerado desde a origem das civilizações. Os hindús acreditavam em uma trindade divina composta de Brama, o passado ou o criador, Vinchnú, o presente ou conservador, e Siva, o futuro ou destruïdor. Dita trindade era representada por três cabeças sôbre um só corpo. Os pagodes tinham três tôrres altíssimas, e na porta do templo de Thom se viam, lavradas em pedra, três colossais cabeças de elefantes de pedra e três de pavão real. Os persas, que comungavam com o princípio de uma dualidade (o bem e o mal) aceitaram assim mesmo, como os egípcios, a idéia de uma trindade, a-pesar-de que estes últimos sentiam certa aversão pelo número três; prova disso é que os reis do Egito consideravam o terceiro dia da semana como dia funesto.

O culto do número 3 foi proclamado, na Grécia por Pitágoras, que o declarou símbolo da perfeição das três épocas: passado, presente e futuro. Repercutiu tanto esta idéia do sábio, que seus sucessores deram ao citado número o qualificativo de harmonia sublime.

Daí vem que os antigos dividiram o universo em três partes: céu, terra e inferno, e que criassem para seu capricho três grandes deuses, 3 deusas, 3 parcas, 3 fúrias, 3 graças, etc., etc. Aristóteles não reconheceu senão três côres, o encarnado, o verde e o violeta. Os romanos davam ao n.° 3 um poder oculto e misterioso; em suas festas, em suas solenidades, tudo o faziam três vezes. Esta preocupação tem passado do paganismo a idade cristã com uma fôrça tradicional extraordinária. Até os franco-maçãos o veneram com seus três pontos e suas três marteladas.

IV

A maior importância histórica do número 4 nos fornece o próprio Pitágoras com sua famosa **autogêne** ou causa primordial: "Deus tem por corpo o universo e é, pela sua vez, um e quádruplo; seu nome é **tetractys** ou quadrinidade". Chamava-o assim porque continha em si mesmo: 1.° o éter, princípio ativo ou macho por excelência **(monade)**; 2.° a matéria, princípio fêmea ou **(dyade)**; 3.° o tempo, que encerra o passado, o presente e o porvir (trindade); e a lei universal ou inexorável destino, que devia abarcar tudo, universo, espaço, tempo e matéria: a rainha **tetractys.**

Nos rituais chineses constam dados importantes sôbre a veneração que se tinha ao número 4 e as coisas quadradas; lembramos agora um muito curioso, respeito à configuração terrestre: "A terra — diziam os chinos — está representada pela côr amarela; sua figura caraterística é quadrada".

Tanta importância teve em certas épocas o número que chegou a publicar-se uma "Aritmética tetrática", isto é, à base do 4.

V

Toda a transcendência histórica do número 5 deriva, como é de supor, dos cinco dedos da mão do homem. Prova disso é que em muitos povos atrasados, em alguns da África, por exemplo, ainda se conta com os dedos e passando de 5 se veem precisados a recorrer ao 5 e 1, 5 e 2, 5 e 3, até o 5 e 5, e torna recomeçar. Daí que em muitos outros países, algo mais adiantados, porém, nos quais ainda não tem entrado o progresso atual, adotem para suas contas o sistema quintesimal.

O número 5 não teve importância exepcional entre os egípcios; entretanto, contam as crônicas que o Proteo de Homero contava todas as coisas de cinco em cinco. Diodoro de Sicília nos diz que no seu tempo se representava o mundo pelo número 5, pelo motivo de serem 5 os elementos: terra, água, ar, fogo e éter. Segundo Pitágoras, Juno, deusa dos casados, protegia o número 5 por estar composto do primeiro par, 2, e o primeiro ímpar, 3, números que reünidos formavam o símbolo do matrimônio. Pelo contrário, Hesiodo considerava o 5 de cada mês como o dia mais nefasto.

VI

E passemos ao 6.

Os antigos tinham já êste número pelo primeiro dos chamados perfeitos. Representavam nele a justiça caminhando sempre a passo firme e exato, não se deixando seduzir nem pela posição social das pessoas, nem pelas deslumbrantes riquezas.

Por meio do 666 se designa no ¡Apocalipse segundo operações cabalísticas, um personagem soberano de Roma que pudera muito bem ser Nero.

VII

Já nas festas religiosas da mais remota antiguidade encontramos claros vestígios do valor do número 7; templos em que se levantavam 7 altares e se sacrificavam 7 vítimas. Os árabes, os sírios e os caldeus tinham todos os seus templos de sete pedras. Pitágoras concedia muita importância aos períodos de sete anos, setenários; e Cícero, descriminando o sonho de Scipião, diz textualmente: "Poucas coisas há no mundo para os quais o 7 não tenha sua pequena ou grande transcendência". Os atenienses mandavam todos os anos 7 crianças ao Minotauro para que as devorasse.

Mais tarde, os hebreus e os cristãos, deram-lhe maior importância ainda. Vejamos: Deus criou o mundo em 7 dias, 7 semanas de Páscoa a Pentecostes, as 7 pragas do Egito, 7 pecados capitais, 7 sacramentos, 7 dores de Maria, etc.

VIII

Os discípulos de Pitágoras o veneravam igualmente que aos seus predecessores, designando nele a lei natural, ou seja esta lei primitiva e sagrada pela qual se intenta manter a grande eqüidade e que supõe todos os homens iguais e com os mesmos direitos; princípio de igualdade que praticava Heliogábalo dum modo originalíssimo: convidando a comer na sua mesa, 8 tortos, 8 coxos, 8 mancos e 8 corcundas, e entragando-os depois às feras.

Do relativo valor dêste número dará uma idéia o fato de terse publicado um volumoso tomo cujo título é **O sistema octoval**, no qual se acham infinidades de problemas baseados no número 8.

IX

O número 9 representava a fragilidade das fortunas humanas e, sôbre tudo, das riquezas mal adquiridas. Porisso os discípulos de Pitágoras aconselhavam evitar toda cifra composta de noves e toda quantidade divisível por dito número; muito particularmente sentiam horror pelo 81, produto de 9 multiplicado por si mesmo.

E' um número que se encontra intimamente ligado às idéias religiosas dos judeus e dos cristãos; lembrem-se das "novenas".

Os persas pretendiam demonstrar que existem 99.999 doenças produzidas pelo poderio satânico. E' número cabalístico; Shakespeare o põe na bôca das bruxas.

X

O mesmo que hoje, nos tempos antigos serviu êste número para expressar certa admiração comparativa. Quando se tratava de ponderar cousa muito bela, diziam os discípulos de Pitágoras: "Êste é 10 vezes mais bonito do que aquele" ou "Êste tem 10 graus de formusura". E observe-se que êste costume está ainda hoje estabelecido, por mais que o cem e o mil nos sirvam melhor para ponto de admiração.

Antigamente se tinha o número 10 por um sinal de paz, de amizade, de simpatia. A razão que davam para sustentar estes símbolos ou emblemas, é que quando duas pessoas se querem bem ou se estimam com plácido carinho, se dão as mãos e, ao juntá-las, formam dez dedos apertados.

Não houve sôbre o 10 muitas preocupações; não obstante, conta-se de Platão que, ao tratar da fundação de sua cidade modêlo, não quis aceitar o número 5040 pela simples razão de ser divisível por 10.

OS CALENDÁRIOS.

Calendário Solar. E' o que abraça o intervalo existente entre dois passos da terra no equinócio ou no mesmo solstício, intervalo êste que é de 365 dias, 5 horas, 48', 51" e 2/3.

Calendário Lunar. Forma-se consultando o curso da lua, que emprega 29 dias, 12 horas, 44' e 3" em voltar à situação que ocupava no mês precedente, com relação à Terra. Resulta, pois, um ano de 354 dias e umas horas, cujo princípio não se adapta a nenhuma época fixa e recorre sucessivamente todas as estações.

Calendário Luni-Solar. Participa do calendário solar e do calendário lunar, como indica seu nome. Pode ser considerado solar em sua totalidade e lunar em seus detalhes. Seu têrmo médio de duração é, como o do calendário solar, de 365 dias e 1/4.

Calendário Vago. Também poderia chamar-se civil. Não se relaciona absolutamente em nada com os fenômenos astronômicos. Sua extensão é fixa e se compõe de um número arbitrário de dias.

Calendário Egípcio. E' o calendário usado pelos antigos. Nos primeiros séculos fixava o princípio de seu ano no equinócio do outono, tempo em que voltavam a empreender os trabalhos, depois da retirada das águas do Nilo. O equinócio de março se encontrava no fim de seu verão.

Quando o Egito passou a dominação Romana, os astrônomos de Alexandria, para corrigir os defeitos de seu calendário e pô-lo de acôrdo com os de seus dominadores, idearam aumentar cada 4 anos um sexto dia, "epagoméne", que colocaram entre o 28 e 29 de agôsto. O ano assim reformado tomou o nome de "Actiaro".

Calendário Persa. Como os Egípcios, assinalavam 365 dias para cada ano, divididos em 12 meses, aos quais se agregavam 5 "epagoménes".

Calendário Árabe. Os árabes se guiavam pelo calendário puramente lunar, retrocedendo 11 dias em cada ano e fixando o princípio do mês pela primeira aparição da lua em quarto crescente. Tem meses e semanas, porém, distingue-se de nosso sistema, pois seu dia começa ao pôr do sol.

Calendário Grego. Para os Gregos começava o ano com a primeira lua que seguia o solstício de verão e nalgumas povoações na primavera e no outono.

Calendário Romano. Os romanos dispunham de "calendas", "nonas" e "idus" para cada mês, caindo as primeiras no dia 1.°

Primeiro Calendário Romano. Na época da fundação de Roma o calendário era bastante imperfeito. Pode-se dizer que seguia então as fases da lua e que tinha 304 dias agrupados em 10 meses do seguinte modo:

1 — Mars — presidido por Marte
2 — Aprilis — presidido por Afrodita (Vênus)
3 — Maia — presidido por Maia
4 — Junius — presidido por Juno

5 — Quintilis — o 5.° mês
6 — Sextilis — o 6.° mês
7 — September — o 7.° mês
8 — October — o 8.° mês
9 — November — o 9.° mês
10 — December — o 10.° mês.

Calendário Republicano. Finalmente o calendário Republicano que dividia o mês em 3 décadas, chamando-se os dias de cada uma; primidi, duodi, tridi, etc., até decadi.

Os meses, segundo o calendário republicano (1789) surgido pouco depois da Revolução Francesa, eram:

1 — Vendimario	—	de	21	set.	a	20	out.
2 — Brumario	—	"	21	out.	"	19	nov.
3 — Frimario	—	"	20	nov.	"	19	dez.
4 — Nivoso	—	"	20	dez.	"	18	jan.
5 — Pluvioso	—	"	19	jan.	"	17	fev.
6 — Ventoso	—	"	18	fev.	"	19	mar.
7 — Germinal	—	"	20	mar.	"	18	abr.
8 — Floreal	—	"	19	abr.	"	18	mai.
9 — Pradial	—	"	19	mai.	"	18	jun.
10 — Messidor	—	"	19	jun.	"	17	jul.
11 — Thermidor	—	"	18	jul.	"	16	agô.
12 — Fructidor	—	"	17	agô.	"	20	set.

Tais datas variavam segundo o equinócio.

Êste calendário não poude ser aceito universalmente pela simples razão de que os nomes dos meses não corespondiam à climatologia dos outros povos. Por exemplo: quando na França estavam em Thermidor, era natural que no Brasil estivessem em Pluvioso e inversamente.

CALENDÁRIO GREGORIANO

Sem segredos para o cálculo de datas

O CALENDÁRIO DOMINADO.

Na época do Papa Gregório XIII, se concretizou a idéia (de longo tempo acariciada) que pretendia a reforma do calendário Juliano, que não correspondia ao ano natural que se compõe como se sabe de 365 dias, 5 horas, 48′ 46″.

O ano Juliano ou político, naquela data, estava uns 11 dias atrasado, devido as diferenças que se tinham produzido com a cronologia de que se serviram em tempos passados.

Reünidos, uma quantidade de homens de ciência, acordaram a forma do calendário que se chamou Reforma Gregoriano em honra do Papa Gregório XIII que o fomentou e o levou em prática durante seu Papado, e que é o que perdura em nossos dias.

Tem 365 dias, 5 horas, 49′ 12″.

As variantes que se fizeram no calendário foram as seguintes:

Passou-se automàticamente do 5 de outubro de 1582 ao qual se chamou 15 do mesmo mês e ano, porque estavam atrasados desta diferença de dias.

Continuou-se como no calendário Juliano, contando os dias por meses e semanas, mas agregando cada quatro anos, no mês de fevereiro, um dia 29, que se chamou bissexto.

Como o ano solar tem 365 dias, 5 horas, 48′ 46″ e o calendário Juliano contava ùnicamente 365 dias, tiveram que computar as 5 horas, 48′ 46″ que se depreciavam anualmente, para sub-sanar, ao qual se estabeleceram uma série de combinações que fizeram mais exata a conta do tempo. Veja-se o que se fez:

Combinou-se em que o número do ano em que suas cifras fôssem divisíveis por 4, fôsse o ano bissexto que teria 366 dias, cujo dia a mais, se agregaria depois do último dia do mês de fevereiro que no ano bissexto teria 29 dias, mas como a-pesar-desta combinação ainda não era possível estabelecer exatidão nos diferentes séculos que se iam produzindo, se acordou que os anos de séculos cujas duas primeiras cifras não fôssem divisíveis por 4, (a-pesar-de o ser, o total do número) não seriam bissextos.

Precisamente aconteceu isto nos anos 1700, 1800 e 1900 e também há outra exceção que é para o ano 8000, que ainda que seja bissexto segundo a regra não poderá ser porque então a pequena diferença que se produz anualmente, que é, insignificante (e compensada naquela época), teria um dia de diferença (se é que se seguir ainda o cômputo atual).

No calendário Gregoriano se reproduzem os meses e as semanas num ritmo uniforme, que nos permitirá buscar coeficientes que nos facilitem vencer as diferenças de dias que se produzem, ao não ser exatas as semanas, no total de 365 dias que têm os anos comuns e que se acrescenta ao considerar que ùnicamente cada 4 anos há um bissexto de 366 dias e com variantes nos anos que representam séculos.

Observemos o que acontece com o cômputo que se faz no calendário.

Os dias de anos bissextos que se produzem do princípio ao fim de cada século, se obtêm dividindo por 4 as últimas duas cifras da direita do número que representa o ano. Fazemos caso omisso do número representado pelos séculos porque por exemplo 1600, 1700, 1800, etc., como terminam em 2 zeros são divisíveis por 4 e o resultado é idêntico.

Além de que para o 1600, 2000, 2400, etc., cujas duas primeiras cifras são divisíveis por 4 e por conseguinte ano bissexto, o teremos em conta ao calcular os módulos dos meses que para cada século poremos mais adiante e assim se compensam as diferenças de dias, de século a século, o que nos permite a forma de estandardizar o cálculo de datas, como veremos a seguir.

Dissemos que os anos bissextos que se produzem em cada século, se obteem dividindo o número do ano por 4.

Por exemplo:

1936 : 4 = 484, o que podemos abreviar dizendo: 36 : 4 = 9, que são os bissextos que se produziram desde 1900 já que ao igual que 1700, 1800, etc., como terminam em dois zeros sempre são divisíveis por 4, assim é que não temos precisão mais que de operar com as duas cifras da direita, que representar os anos, para indagar os bissextos desde o princípio do século.

Assim sabemos os números que se computam a mais, no que vai transcorrido de cada século.

Agora bem: se nós fixamos as variantes que se produzem ao passar de um mês ao outro, como constante na relação com os dias da semana, na cronologia estabelecida pelo calendário Gregoriano e as tomamos como norma de cálculo, fazendo entrar nele

os anos e os bissextos que se produzem e agregando-lhes os dias transcorridos do mês formaremos uma soma de números (dias) que variam, sincronizados, com as normas que acabamos de explicar.

Dividindo-a por 7, teremos o número de semanas que se produzem e o resíduo representa o dia da semana respectiva, com o que se forma a seguinte tabela de resíduos que poderemos indagar de acôrdo com classificação seguinte:

Resíduos		**Dias a que correspondem**
0	representa	domingo
1	"	segunda-feira
2	"	têrça-feira
3	"	quarta-feira
4	"	quinta-feira
5	"	sexta-feira
6	"	sábado

Agora bem, as diferenças nos meses vêm representadas com relação aos séculos da seguinte maneira:

MÓDULOS DOS MESES

Anos	Módulo	Mês
Anos de 1600 a 1699	6	janeiro
	2	fevereiro
	2	março
	5	abril
	0	maio
	3	junho
	5	julho
	1	agôsto
	4	setembro
	6	outubro
	2	novembro
	4	dezembro
Anos de 1700 a 1799	4	janeiro
	0	fevereiro
	0	março
	3	abril
	5	maio
	1	junho
	3	julho
	6	agôsto
	2	setembro
	4	outubro
	0	novembro
	2	dezembro
Anos de 1800 a 1899	2	janeiro
	5	fevereiro
	5	março
	1	abril
	3	maio
	6	junho
	1	julho
	4	agôsto
	0	setembro
	2	outubro
	5	novembro
	0	dezembro
e para 1900 a 1999	0	janeiro
	3	fevereiro
	3	março
	6	abril
	1	maio
	4	junho
	6	julho
	2	agôsto
	5	setembro
	0	outubro
	3	novembro
	5	dezembro

Estes são os módulos que diferenciam os séculos, os quais formam um ciclo que se repete cada 400 anos.

De maneira que para calcular os dias da semana nos anos de 2000 a 2099, se precisariam os módulos de 1600 a 1699, para os anos de 2100 a 2199, os de 1700 a 1799, para os anos de 2200 a 2299, os de 1800 a 1899, para os anos de 2300 a 2399 os de 1900 a 1999 e assim correlativa e sucessivamente.

Obtidas estas relações que ligam, século, ano, mês e dia, operemos casos práticos para explicarmos como pode obter-se o dia da semana de uma data qualquer, o que com um pouco de prática, pode fazer-se rápida e, incluso mentalmente

Seja averiguar o 15 de maio de 1914; diremos:

14 (anos) : 4 = 3 (bissextos) (o resto 2 não interessa porque até o 29 de fevereiro de 1916 não se produz outro dia bissexto) e agora 14 + 3 = 17 : 7 = 2 semanas mais **3 de resto.** (As semanas exatas não interessam visto que não afetam o dia do resultado, do que poderemos convencer-nos se observarmos que num mesmo mês de qualquer ano correspondem 4 ou 5 dias de igual denominação semanal dentro de um mesmo mês; Seja por exemplo: domingo dia 2 de qualquer mês, o serão igualmente no mesmo mês os dias 9, 16, 23 e 30). De maneira que dispomos o cálculo como segue:

Módulo do ano (resto explicado)	3
Módulo do mês (de maio)	1
Dias do mês	15
Total de dias a computar..	19

que dividindo por 7 dias que tem a semana, dá duas semanas e 5 de resíduo.

As semanas não interessam e sim o resíduo, que sendo 5, representa sexta-feira como se desprende do módulo já descrito ao relacionar os dias da semana.

Como no módulo do ano temos dividido por 7, poderíamos fazê-lo ao fim para generalizar operando no caso anterior da seguinte maneira:

Módulo do ano { 14 : 4 = 3, de onde 14 + 3 = 17 sem dividir por 7 }	17
Módulo do mês de maio	1
Dia do mês	15
Total de dias computados	33

e agora 33 : 7 = 4 semanas e 5 dias, cujo resíduo 5 é o que nos interessa, pois conforme a relação dos dias da semana corresponde a sexta-feira de acôrdo ao caso anterior.

Isto tinha que suceder assim pois como já temos dito em um mês há 4 ou 5 dias que correspondem ao mesmo dia da semana e daí a necessidade de dividir por 7 para fazer mais simples a interpretação do resíduo e por onde o dia que corresponde dá semana.

Observação: Se o ano fôsse bissexto nos meses de janeiro e fevereiro desconta-se uma unidade, porque recém em 29 de fevereiro se produz o cômputo do dia bissexto.

CASO PRÁTICO DO ANO BISSEXTO E CORRESPONDENTE DE 1.º DE JANEIRO A 29 DE FEVEREIRO.

Seja procurar o dia da semana a que corresponde o 12 de janeiro de 1936.

Temos:

Módulo do ano 36 : 4 = 9; então 36 + 9 =	45
Módulo do mês de janeiro	0
Dia do mês	12
Total de dias computáveis	57
Menos 1 a descontar por não ter-se agregado ainda o 29 de fevereiro por não ter chegado a dita data	1
	56

que dividindo por 7 nos dá 8 semanas e resíduo 0, o que segundo a tabela de resíduos corresponde a domingo.

Outro caso prático:

15 de outubro de 1915.

Módulo do ano. 15 : 4 = 3 (depreciamos o resíduo pois o bissexto se produzirá em 1916 e não afeta ao calendário) então 15 + 3 = 18
Módulo do mês de outubro = 0
Dia do mês = 15

Total de dias a computar 33

que dividimos por 7 dando de resíduo 5, de maneira que foi **sexta-feira** o dia 15 de outubro de 1915.

Outro caso:

22 de junho de 1916.

Módulo do ano, 16 : 4 = 4, então 16 + 4 (em conjunto) = 20
Módulo do mês de junho 4
Dia do mês 22

Dias computáveis 46

que divididos por 7 dá 6 e 4, de resíduo, então êste dia foi **quinta-feira.**

Outro caso que serve de controle recíproco com o da tabela de 100 anos, (que encontra-se mais adiante).

Exemplo: 16 de outubro de 1912.

Módulo do ano: 12 : 4 = 3; então 12 + 3 = 15
Módulo do mês de outubro 0
Dia do mês 16

Dias computáveis 31

que dividindo por 7 dá de resíduo 3, que corresponde a quarta-feira de acôrdo com as tabelas para 100 anos expostas neste mesmo livro.

Vejam que nestes dois últimos casos os anos eram bissextos e temos operado sem observação já que a que fizemos antes é ùnicamente para os meses de janeiro e fevereiro dos anos bissextos em que se desconta do total.

Com estes desenvolvimentos e cálculos de módulos para séculos, anos, meses e semanas, temos seguido passo a passo sem variar a concatenação e sincronismo do Calendário Gregoriano para que se compreenda bem a atuação dos diferentes dados que intervêm no cálculo de datas.

Agora bem; também podemos abreviaá-lo mais, usando ùnicamente de módulo constante que sirva para todos os meses de qualquer século, cuja constante especial precisa que se preste de nexo entre as variantes dos quatro séculos (ciclo) em que se distribue o calendário, com a única exeção até o ano 8000, que como temos explicado a-pesar-de ser os primeiros dois algarismos da esquerda divisíveis por 4, não será bissexto por ter já naquela data, (se é que subsistir êste calendário) um dia de diferença a compensar.

Sabemos e já dissemos, que as semanas se produzem nos meses, repetindo-se cada 7, 14, 21 e 28 dias e que todos os meses sem exeção de séculos, seguem esta disposição.

Agora bem; nós podemos interpretar no cálculo, as diferenças ou módulos que existem entre os diferentes meses e fixar uma relação de 12 módulos para 12 meses em que se distribue um ano qualquer. Se nós estabelecemos também uma constante entre o ciclo de 4 séculos em que se desenvolve e reproduz a conta do calendário, temos os elementos necessários para calcular qualquer data que se nos peça referente ao mesmo, e como o interessante para nós é calcular por ser o mais útil, o dia da semana à que corresponde uma data qualquer, vamos dar outro método prático como se obtém, mas antes devemos dar os valores das constantes para o ciclo dos quatro séculos em que o calendário se repete (até 8000) e dalí em diante sofrerá uma pequena reforma servindo a-pesar-disso o mesmo método.

CONSTANTES PARA OS 4 SÉCULOS (CICLO)

De 1600 a 1699 = 6
" 1700 " 1799 = 4
" 1800 " 1899 = 2
" 1900 " 1999 = 0

MÓDULO PARA QUALQUER SÉCULO

janeiro	0
fevereiro	3
março	3
abril	6
maio	1
junho	4
julho	6
agôsto	2
setembro	5
outubro	0
novembro	3
dezembro	5

CLASSIFICAÇÃO DOS RESULTADOS

Resíduos encontrados	Dias da semana a que correspondem
0	domingo
1	segunda-feira
2	têrça-feira
3	quarta-feira
4	quinta-feira
5	sexta-feira
6	sábado

Temos pôsto estes módulos que são os que utilizamos, mas poderíamos variá-los sempre que coordenássemos os que desejarmos utilizar com os elementos que entram para desenvolver o cálculo (séculos, meses, anos, semanas e dias).

Depois dêste introito, passemos a verificar pràticamente alguns casos.

Seja calcular, por êste procedimento, o dia da semana que correspondeu ao 1.° de novembro de 1882. Temos:

Anos (Duas cifras a direita deixando os séculos)	82
Bissextos (1/4 parte)	20
Constante do século (Veja-se a tabela)	2
Módulo do mês	3
Dia do mês	1
Dias computáveis	108

que dividindo por 7 para tirar as semanas exatas e procurar os resíduos nos dá

108 : 7 = 15 semanas
38
3 resíduo = quarta-feira

que é o dia da semana que se procura.

Temos que observar que poderíamos abreviar os cálculos lembrando alguns dos múltiplos de 7 como 14, 21, 28, 35, 42 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, 105, 112, 119, 126, 133, 140, 147, 154, 161, que é o máximo que se pode descontar da soma formada com todos os dados e que aplicado no caso anterior (para evitar a divisão já que o número de semanas não interessa) poderíamos dizer:

$$108 - 105 \text{ (múltiplo de } 7 = 7 \times 15) = 3$$

temos resíduo 3, de maneira que seguindo a tabela de classificação dos dias da semana 3 corresponde a **quarta-feira.**

Outro caso prático.

16 de outubro de 1912.

DADOS

Anos (sem os séculos)	12
Bissextos 1/4 parte	3
Constante do século (Vejam-se as tabelas)	0
Módulo do mês	0
Dia do mês	16
	31

31 : 7 = 4 semanas e
3 de resíduo = **quarta-feira** (clasificação dos dias da semana) ou bem

31 — 28 (descontando um múltiplo de 7; =7×4) = 3 de resíduo que corresponde a **quarta-feira.**

Outro caso prático do século passado:

25 de outubro de 1880

Ano	80
Bissextos	20
Constante do século	2

Módulo do mês	0
Dia do mês	25
	127

então:

127 : 7 = 18 semanas
57
1

e 1 de resíduo = 2.ª-feira.
e também 127 — 126 (múltiplo de 7 = 18 × 7) dá de resíduo 1 que resulta segunda-feira como antes.

Como queira que cada 28 anos se desenvolvem completamente as caraterísticas de sincronização do Calendário Gregoriano, podemos nos casos de anos, subtrair 28, 56 ou 84, do número de anos, pois obtemos sempre igual resultado e do número que representam dias do mês podemos antes de operar dividí-lo por 7 porque as semanas se repetem cada sete dias. Um caso prático nos ajudará a compreender o que dizemos e podemos aplicá-lo quando desejarmos abreviar ainda mais a operação:

Seja calcular o

29 de abril de 1897

podemos dispor assim a operação

29 de abril de 1897
— 28 = (4 semanas a 7 dias) — 84 = (3 períodos iguais de repetição cada 28 anos).

1 abril de 1813

o que quer dizer que podemos reduzir as cifras com que calculamos a uma expressão menor sem alterar os resultados, assim que no lugar de operar dizendo:

Anos	97
Bissextos 1/4 parte (sem resíduo)	24
Constante do século	2
Módulo do mês	6
Dia do mês	29
	158

então:

158 : 7 = 22
18
4 de resíduo que é igual a quinta-feira, assim pois, para fazê-lo mais simples podemos dizer

Anos	13
Bissextos 1/4 parte (sem resíduo)	3
Constante do século	2
Módulo do mês	6
Dia do mês	1
	25 e

25 — 21 = 4 de resíduo que é quinta-feira, de acôrdo ao procedimento anterior.

Também poderíamos dizer na mesma data de 29 de abril de 1897

29 de abril de 1897
— 7 (seria igual descontar 14, 21 ou 28) — 56 (2 períodos de 28 seria igual 28 ou 84)

22 de abril de 1841

calculamos êste número e teremos:

Ano	41
Bissextos 1/4 parte	10
Constante do século	2
Módulo do mês	6
Dia do mês	22
	81 e

81 : 7 = 11
11
4

de resíduo de acôrdo com os resultados precedentes.

Demonstrado pràticamente como podem-se fazer substituïções que abreviem as operações, deixamos ao bom critério dos que calculem, o aplicar as que creiam oportunas e convenientes.

Observe-se que quando procurando 1/4 dos anos temos depreciado o resíduo, porque para que se produza um bissexto teem

que cumprir-se 4 anos num dia 29 de fevereiro, de maneira que quando não alcança a êste cômputo não influe no cálculo.

Também quando se opere nos meses de janeiro e fevereiro de um ano bissexto se desconta um dia da soma pela razão que acabamos de expor, respeito a cômputo para bissextos, pois repetimos que recém o dia se agrega na conta do calendário depois do 28 de fevereiro do ano bissexto.

Outro caso:

8 de dezembro de 1911

Anos	11
Bissextos	2
Constante do século	0
Módulo do mês	5
Dia do mês	8
	26

de maneira que 26 — 21 = 5 ou seja uma **sexta-feira.**

Outro caso:

11 de agôsto de 1922

Anos	22
Bissextos	5
Constante do século	0
Módulo do mês	2
Dia do mês	11
	40

e agora

40 : 7 = 5 semanas e

5 de resíduo que corresponde a **sexta-feira** ou bem

40 — 35 = 5 ou seja **sexta-feira.**

UM CASO DE BISSEXTO NOS MESES DE JANEIRO E FEVEREIRO

Seja calcular o dia da semana que correspondeu ao 12 de fevereiro de 1908. Temos como:

DADOS

Anos	8
Bissextos	2
Constante do século	0
Módulo do mês	3
Dia do mês	12
	25
menos um dia do bissexto pois o temos anotado e recém se computará depois do 28 de fevereiro —	1
	24

então 24 — 21 = 3 que corresponde a **quarta-feira** segundo a classificação feita dos dias da semana.

Estes são a grandes rasgos as caraterísticas do Calendário Gregoriano, as que publicamos pela primeira vez em Bruxelas (Bélgica) no ano de 1913, vista a aceitação que tinham antes desta data, quando faziamos cálculos mentais, que nos permitiam resolver ràpidamente e contestar oral ou epistolarmente as perguntas que sôbre elas nos faziam contìnuamente.

CALENDÁRIO

Para os anos de 1900 ao 2000

Todos sabem a data exata de seu nascimento, mas são poucos os que sabem o dia da semana em que se deu tão grande acontecimento.

Mediante o calendário para cem anos que expomos neste capítulo, podem calcular êsse dia todos os nascidos no século presente. Entretanto isto é sòmente uma das mil aplicações que tem êsse calendário, o qual permite saber com presteza o dia da semana que corresponderá futuramente a qualquer data.

Tanto para o uso particular como para os negócios e sôbre tudo para os cálculos astronômicos, o calendário constitue um valioso elemento de orientação que economiza cálculos complicados, ajudando assim a ganhar muito tempo.

O modo de fazer uso das duas tabelas que compõem o calendário em questão não pode ser mais simples.

Suponhamos que seja preciso averiguar o dia da semana que correspondeu a data 16 de outubro de 1912.

PRIMEIRA TABELA

				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1901	1929	1957	1985	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
1902	1930	1958	1986	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
1903	1931	1959	1987	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
1904	1932	1960	1988	5	1	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
1905	1933	1961	1989	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
1906	1934	1962	1990	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
1907	1935	1963	1991	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
1908	1936	1964	1992	3	6	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
1909	1937	1965	1993	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
1910	1938	1966	1994	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
1911	1939	1967	1995	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
1912	1940	1968	1996	1	4	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
1913	1941	1969	1997	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
1914	1942	1970	1998	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
1915	1943	1971	1999	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
1916	1944	1972	....	6	2	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
1917	1945	1973	....	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
1918	1946	1974	....	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
1919	1947	1975	....	3	6	6	2	4	2	2	5	1	3	6	1
1920	1948	1976	....	4	0	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
1921	1949	1977	2000	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
1922	1950	1978	....	0	3	3	6	1	2	6	2	5	0	3	5
1923	1951	1979	....	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
1924	1952	1980	....	2	5	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
1925	1953	1981	....	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
1926	1954	1982	....	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
1927	1955	1983	....	6	2	2	5	0	3	3	1	4	6	2	4
1928	1956	1984	....	0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6

NOTA. Os números sôbre a linha da direita representam os meses, assim: 1 janeiro, 2 fevereiro, 3 março, 4 abril, 5 maio, 6 junho, 7 julho, 8 agôsto, 9 setembro, 10 outubro, 11 novembro, 12 dezembro.

SEGUNDA TABELA

1	8	15	22	29	36	domingo
2	9	16	23	30	37	segunda
3	10	17	24	31	38	têrça
4	11	18	25	32	39	quarta
5	12	19	26	33	40	quinta
6	13	20	27	34	41	sexta
7	14	21	28	35	42	sábado

Para averiguá-lo se procede da maneira seguinte:

1.° Começa-se por assinalar o ano 1912 que se encontra nas colunas da esquerda da 1.ª tabela.

2.° Corre-se o lapis do número 1912 para a direita até enfrentar a coluna correspondente ao mês de outubro ou seja a coluna 10 e acha-se o n.° 2.

3.° Ao número 2 encontrado, somam-se os 16 dias do mês de outubro, quer dizer, os da data que interessar e se obterá um total de 18.

4.° Procura-se o n.° 18 na segunda tabela correndo logo o lapis até a coluna dos dias, na direita, onde o interessado ficará sabendo que o 16 de outubro de 1912, foi uma quarta-feira.

Assim sendo poderá ver-se que o uso dêste calendário, para cem anos, não oferece dificuldades de classe alguma e nem sequer nenhum esfôrço que signifique o mais simples dos cálculos.

O ALMANAQUE PERPÉTUO

Teoria cronológica.

COMO SE MEDE O TEMPO

Ùnicamente pelo movimento é que nós formamos idéia da sucessão dos instantes. As divisões do tempo não podem marcar-se mais que por espaços recorridos. Mas, para que a medição seja exata, é preciso que o movimento seja constante e uniforme, o qual não é possível achar sôbre a terra. A alma que sofre e a alma que goza não contam de igual modo; e o tempo, que se arrasta como um velho nos dias que reina a dor, leva rápida carreira, para um jovem durante os breves instantes que dura a sa-

tisfação vivaz e grata. O único movimento constante e uniforme é o dos corpos celestes. Êsses corpos se movem com marcha igual e tranqüila no espaço do universo, com uma constância que tem sido negada ao ser humano, com uma duração, talvez ilimitada, que tão pouco existe na natureza dêste. Assim, pois, o homem pediu a Astronomia a conta do tempo. O intervalo duma saída de sol à outra constitue uma unidade de medida que chamou-se dia. Mas, a humanidade necessita medir maiores espaços, para o qual fez uso dos movimentos do sol e da lua. Com efeito, a repetiçãão das mesmas fases da lua ou das mesmas estações representam intervalos sensìvelmentes iguais. Os povos convieram nesse feito; uns contaram por luas ou meses; outros por revoluções do sol ou anos; outros por meses e anos. A combinação dêsses movimentos e de suas revoluções nos tem dado a medida do tempo por meio do Calendário, que devia, muito mais tarde, servir para formular nada menos que as leis do movimento dos corpos celestes, pela atração universal.

Do que está transcrito resulta que a medição do tempo tem lugar de acôrdo com as seguintes unidades, que definiremos nos termos gerais.

Dia é o tempo que necessita a terra para efetuar uma rotação sôbre o seu eixo. O dia se divide em 24 horas, cada hora em 60 minutos e cada minuto em 60 segundos.

Mês é o intervalo compreendido entre duas posições iguais da lua com respeito a terra. Chama-se também lunação e eqüivale a 29 dias, 12 horas, 44 minutos e 2 segundos.

Fases da Lua. — Chama-se novilúnio ou lua nova o primeiro quarto de lunação que começa com a conjunção e durante o qual a lua fica invisível para a terra. Ao período que segue se denomina quarto crescente porque durante êste tempo aumenta a porção do disco lunar visível para nós. Segue logo o plenilúnio ou lua cheia, período em que está visível por completo. Finalmente, o resto da lunação é o quarto minguante, durante cujo tempo a lua se torna menos visível até voltar ao seu novilúnio, com o qual inaugura outro mês lunar.

Ano é o intervalo de tempo que medeia entre duas coincidências do sol com o equinócio de primavera. Eqüivale a 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos.

Estações. — A posição da terra com respeito ao sol dá lugar as estações. A Primavera começa no primeiro equinócio ou época

em que o sol corresponde ao equador terreste (20 março). O Verão começa no solstício que vem (21 junho) época da máxima altura do sol. O equinócio seguinte (22 setembro) é o comêço do Outono, e, por fim, o inverno dá comêço com o segundo solstício (21 dezembro).

Para os habitantes do hesmisfério austral começa o Outono donde marcamos a Primavera e assim sucessivamente as variações respectivas.

Zodíaco. — Os doze sinais do Zodíaco são outras tantas constelações cuja posição aparente recorre o sol durante uma revolução anual da terra. Com o equinócio da Primavera entra o sol no primeiro sinal, Aries; sucedendo-se mensalmente os outros: Tauro, Gérminis, Câncer, Léu, Virgo, Libra, Escorpião, Ságitário, Capricórnio, Aquário e Piscis.

NOSSO CALENDÁRIO

Como já explicamos nosso Calendário, adatado pela maior parte dos países civilizados, se chama Calendário Gregoriano, e tem sua origem no Calendário Romano. De Numa até Júlio César não existiram regras fixas para dito calendário. A correspondência do ano lunar de 12 lunações com o ano solar que formam 365 dias que regula as estações, se obtinha por meio de intercalações fixadas arbitràriamente. O último ano dêsse regime (40 anos antes de J. C.) foi de 445 dias e se tem chamado o ano da confusão.

O Calendário Juliano se deve a Júlio César com a cooperação de Sosígenes, célebre astrônomo e matemático de Alexandria. O ano juliano ordinário consta de 365 dias. Cada quatro anos se agrega um dia a intercalar depois do 28 de fevereiro. Com a data 29 obtem-se dêste modo o ano bissexto de 366 dias. A duração média do ano solar resulta assim de 365 1/4 dias solares médios. Mas esta duração é um pouco excessiva, já que o ano trópico o intervalo de dois equinócios de primavera se compõe de 365,2422042 dias; esta diferença faz um total de quase 7 dias em nove séculos. Por êste motivo desde o ano 1414 de nossa Era, começou a notar-se que os equinócios de primavera e de outono se antecipavam cada vez mais às épocas do 21 de março e do 21 de setembro ao que se havia referido primitivamente.

A reforma do calendário se impôs desde então como uma ne-

cessidade. Dita reforma teve lugar, por fim, durante o pontificado de Gregório XIII, que ordenou sua execução por meio de uma bula publicada à 24 de fevereiro de 1582. Foi adotada em seguida em todos os países católicos, e, sucessivamente, ainda que muito mais tarde, nas nações protestantes. Em poucos pontos se conserva o velho estilo (Calendário Juliano); desde o ano 1800 ao 1900 a diferença entre ambos os sistemas foi de 12 dias; a partir do mês de março de 1900 é de 13 dias.

A reforma gregoriana consistiu em omitir as datas dos 10 dias seguintes ao 4 de outubro de 1582 (de maneira que o dia imediato se chamou 15 em vez de 5) e em suprimir para o sucessivo o dia a intercalar de fevereiro em 3 anos centenais por cada 4.

Para demonstrar a aproximação da nova regra vejamos o número de dias de cem séculos gregorianos: de um a 10,000 se encontram 2,000 números divisíveis por 4, que são dos anos bissextos; para os anos seculares de 1 a 100 haverá 25 números divisíveis por 4 e 75 não divisíveis, por conseguinte em cem séculos gregorianos há 2,425 anos bissextos e um total de 3,652,422 dias; a duração média do ano gregoriano resulta, pois, de 365,2422 dias.

ERA CRISTÃ

Em todos os países civilizados se leva o cômputo dos anos que transcorrem segundo a Era Cristã ou vulgar, cujo ano 1 é o que começou imediatamente depois do nascimento de Jesús Cristo.

Séculos: O 1 de nossa Era compreende os anos 1 a 100.

O II os anos 101 a 200.

O III os anos 201 a 300, etc.

E assim mesmo, o XIX compreende 1801 a 1900 e o XX de 1901 a 2000 inclusive, etc.

Anos: Um ano comum tem 365 dias, distribuídos em 12 meses (52 semanas e 1 dia).

Um ano bissexto tem 366 dias, distribuídos em 12 meses (52 semanas e 2 dias).

Meses: Os doze meses do ano são:

Janeiro		31 dias
Fevereiro	(bissexto 29)	28 "
Março		31 "

Abril	30 "
Maio	31 "
Junho	30 "
Julho	31 "
Agôsto	31 "
Setembro	30 "
Outubro	31 "
Novembro	30 "
Dezembro	31 "

O mês de fevereiro tem 28 dias quando o ano é comum e 29 quando é bissexto.

Dias: Os dias se reproduzem por períodos de sete, chamados semanas. Ditos dias são: domingo, segunda-feira, têrça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira e sábado.

O dia civil começa à meia-noite (hora 0) e termina 24 horas depois. Meio dia é às 12 horas em cujo momento passa o sol pelo meridiano correspondente ao lugar em que se acha o observador.

CRONOLOGIA.

Além da Era Cristã, se tem utilizado e se utilizam outros cômputos para estabelecer a conta do tempo. Em cada caso se considera como ponto de partida uma época célebre a partir da qual se computam os anos, sendo as principais as seguintes.

Era dos Judeus, que começa em 3761, antes de J. C., o dia 7 de outubro.

Era das Olimpiadas, segundo os gregos, começa em 776 antes de J. C., até a metade do dito ano. Cada Olimpiada compreende 4 anos, terminando com a 294 Olimpiada, correspondente ao ano 394 depois de J. C.

Era da fundação de Roma, 733 anos antes de J. C., ano 1.° da 6.ª Olimpiada.

Era de Nabonasar, segundo os babilônios, 747 antes de J. C., o 26 de fevereiro.

Era da Hégira ou fuga de Maomet, para os maometanos. Ano 622 depois de J. C., o 16 de julho. Os anos muçulmanos são lunares e teem sòmente uns 354 dias.

Era da República Francesa, de 22 de setembro de 1792 (ano 1) até 31 de dezembro 1805 (ano XIV).

Para relacionar entre si estas diferentes Eras e poder fixar cronològicamente as datas da história, Escalígero estabeleceu um período artificial, chamado Período Juliano, cujo ano 1 corresponderia ao 4713 antes de J. C., época que resulta anterior a todos os tempos históricos. Referindo pois, as Eras em questão ao período Juliano (que não deve confundir-se com o calendário Juliano de que antes se falou), poderemos dar-nos conta perfeitamente do número de anos que separa umas das outras.

Anos do período Juliano:

953. — Ano 1 da era dos judeus.
3138. — " 1 " " das Olimpiadas.
3961. — " 1 " " da fundação de Roma.
3967. — " 1 " " de Nabonasar.
4714, — " 1 " " Cristã.
5335. — " 1 " " Hégira.
6505. — " 1 " República Francesa.

Mais adiante veremos a aplicação do período juliano à determinação do cômputo eclesiástico.

CÔMPUTO ECLESIÁSTICO.

Chama-se assim o conjunto dos cálculos que se utilizam para estabelecer o calendário para cada ano, e, muito especialmente, as datas das festas chamadas móveis.

Os elementos que figuram no cômputo eclesiástico são: o **ciclo lunar (áureo número e epacta)** o **ciclo solar (letra Dominical)** e a **indicção romana.**

CICLO-LUNAR, ÁUREO-NÚMERO-EPACTA.

Ciclo lunar é um período de 19 anos, transcorrido o qual voltam as faces da lua a corresponder-se com as mesmas datas do ano. Como doze meses lunares têm uns 353 dias sòmente, resulta que ao terminar um ano civil, de 365 dias, as faces da lua se apresentam antecipadas de 11 dias para o ano seguinte. Terminado êste, a diferença é de 22 dias, e ao fim do terceiro ano fica reduzido o adianto de só três dias, pois dos 33 produzidos

pelos três anos à razão de 11 dias se há completado um novo mês lunar, sobrando ainda 3 dias. Como se tem dito, só depois de 19 anos volta a coincidir o princípio do ano com a mesma posição ou idade da lua. Ditos 19 anos se numeram com os 19 números que indicam sua ordem dentro do ciclo e esta ordem constitue o **Áureo número.**

Epacta é o número de dias transcorridos ao começar o ano desde a última lua nova do ano anterior, ou seja, simplesmente a idade da lua de que temos feito referência ao explicar o ciclo lunar.

A tabela indica as Epactas dos anos desde o 1582 em que teve lugar a reforma Gregoriana até 2499 inclusive.

Para saber, por exemplo, a epacta de 1899 se procura na linha horizontal do 99 dentro da coluna vertical do século marcado 1800 e se achará 18 que é a epacta. As epactas marcadas, correspondem aos anos cujo número Áureo é 1. Quando a epacta 25 cai em anos cujo áureo número é maior que 11, se indica em cifras romanas (XXV) por ser um caso especial que afeta ao cálculo da Páscoa.

CICLO SOLAR. — LETRA DOMINICAL.

Ciclo Solar é um período de 19 anos depois dos quais voltam a coincidir os dias da semanas com as mesmas datas de todo o ano. Nos calendários às vezes indica-se o número de ordem que ocupa o ano correspondente dentro do século solar.

Si se marcam com as letras A, B, C, D, E, F, G, do alfabeto os sete primeiros dias do ano e se repete esta série durante todos os demais, resultará, que se aquele começa por um domingo, a letra A corresponderá a todos os domingos do ano e será a letra Dominical; se começa por Sábado, B será dita letra; se começa por sexta-feira C, e assim sucessivamente.

Só por exceção, os anos bissextos terão duas letras dominicais uma para os domingos de janeiro e fevereiro e outra para os domingos dos restantes meses.

Como quer que o ano de 365 dias tem um de excesso sôbre as semanas que o compõem, cada ano começa a semana com um dia de adianto com respeito ao ano anterior, ou com dois se fôsse bissexto. Portanto a sucessão de letras dominicais se verifica em sentido inverso, nesta forma: G, F, E, D, C, B, A, das quais corresponde por ordem uma a cada ano comum e duas a cada um dos bissextos.

TABELA DE EPACTAS

ANOS						1500	1600	1700	1800	1900	2000	2100	2200	2300	2400
00	19	38	57	76	95	19	15	9	4	29	24	19	13	8	4
01	20	39	58	77	96	1	26	20	15	10	5	0	24	19	15
02	21	40	59	78	97	12	7	1	26	21	16	11	5	0	26
03	22	41	60	79	98	23	18	12	7	2	27	22	16	11	7
04	23	42	61	80	99	4	29	23	18	13	8	3	28	22	18
05	24	43	62	81			10	4	0	24	19	14	9	3	29
06	25	44	63	82			21	15	11	5	0	XXV	20	14	10
07	26	45	64	83		7	2	26	22	16	11	6	1	25	21
08	27	46	65	84		18	13	7	3	27	22	17	12	6	2
09	28	47	66	85		29	24	18	14	8	3	29	23	17	13
10	29	48	67	86		10	5	0	25	19	14	10	4	28	24
11	30	49	68	87		21	16	11	6	0	XXV	21	15	9	5
12	31	50	69	88		2	27	22	17	11	6	2	26	20	16
13	32	51	70	89		13	8	3	28	22	17	13	7	1	28
14	33	52	71	90		24	19	14	9	3	29	24	18	12	9
15	34	53	72	91		5	1	25	20	14	10	5	29	23	20
16	35	54	73	92		16	12	6	1	XXV	21	16	10	4	1
17	36	55	74	93		27	23	17	12	6	2	27	21	15	12
18	37	56	75	94		8	4	28	23	17	13	8	2	27	23

TABELA DE LETRAS DOMINICAIS

ANOS				1500 1900 2300	1600 2000 2400	1700 2100 2500	1800 2200 2600
00				G	B A	C	E
01	29	57	85	F	G	B	D
02	30	58	86	E	F	A	C
03	31	59	87	D	E	G	B
04	32	60	88	C B	D C	F E	A G
05	33	61	89	A	B	D	F
06	34	62	90	G	A	C	E
07	35	63	91	F	G	B	D
08	36	64	92	E D	F E	A G	C B
09	37	65	93	C	D	F	A
10	38	66	94	B	C	E	G
11	39	67	95	A	B	D	F
12	40	68	96	G F	A G	C B	E D
13	41	69	97	E	F	A	C
14	42	70	98	D	E	G	B
15	43	71	99	C	D	F	A
16	44	72		B A	C B	E D	G F
17	45	73		G	A	C	E
18	46	74		F	G	B	D
19	47	75		E	F	A	C
20	48	76		D C	E D	G F	B A
21	49	77		B	C	E	G
22	50	78		A	B	D	F
23	51	79		G	A	C	E
24	52	80		F E	G F	B A	D C
25	53	81		D	E	G	B
26	54	82		C	D	F	A
27	55	83		B	C	E	G
28	56	84		A G	B A	D C	F E

A presente tabela compreende o Calendário gregoriano desde sua instituïção (15 de outubro de 1582 até o ano 2699, podendo ser prolongada indefinidamente com só atribuir a cada coluna vertical os séculos sucessivos, seguindo a mesma ordem dos inscritos na cabeceira.

Para saber a dominical de um ano qualquer, por exemplo, 1899, se procurará na tabela, na linha do ano 99, coluna do século 1800 e se achará A que é a letra dominical do ano proposto.

Anos bissextos. — Como todos os anos bissextos têm duas letras e uma sòmente os que são comuns, se determinará sem necessidade de cálculo se um ano é ou não bissexto, procurando na tabela a dominical correspondente.

INDICÇÃO ROMANA

Indicção romana é um cômputo usado antigamente pelos autroes eclesiásticos e conservado nas bulas pontificiais, formado pela repetição de um período de 15 anos chamado ciclo de indicção. Dito cômputo se atribue a Constantino, quem o instituiu em 312 de nossa Era.

Nos calendários se indica o número da ordem do ano correspondente dentro do ciclo de indicção, e êste dado com o áureo número e ciclo solar constituem o chamado Cômputo Eclesiástico.

DETERMINAÇÃO DO ÁUREO NÚMERO, DO CICLO SOLAR E DA INDICÇÃO ROMANA

Si se multiplicam entre si os números 15, 19 e 28 que representam respectivamente os anos de que se compõem os ciclos de indicção lunar e solar, se obterá um produto 7,980, que representa o número de combinações possíveis daqueles três ciclos. Êste período de 7,980 anos constitue o Período Juliano de Escalígero, cujo ano 1 seria o que tivesse a unidade como indicção dos três ciclos da mesma vez, condição que recaïria precisamente no ano 4713 antes de J. C.

Sendo o ano 4713 antes de J. C., o 1 do Período Juliano, se chamarmos N a qualquer ano de nossa Era, teremos que, somando 4780 + N, o total será o ano do Período Juliano eqüivalente ao ano N. Dividindo êste total por 19 (ciclo lunar) por 28 (ciclo

solar) e por 15 (ciclo de indicção) o resíduo que resultar em cada caso será o número da ordem de dito ano dentro do ciclo respectivo.

Exemplo:

¡Ano 1899. Áureo número?, Ciclo Solar?, Indicção romana? Somar 4713 + 1899 = 6612 ano do Período Juliano.

Dividindo 6612 : 19 = resíduo 0 + áureo número de 1899 = 19.
Dividindo 6612 : 28 = resíduo 4 + ciclo solar de 1899 = 4.
Dividindo 6612 : 15 = resíduo 12 + indicção romana de 1899 = 12.

Quando o resíduo é 0 representa o último ano do ciclo, ou sejam, respectivamente, 19.°, o 28.° e o 15.°.

CALENDÁRIO ECLESIÁSTICO

Assinalando a cada um dos dias que compõem o ano, as letras dominicais, na forma que se tem expressado anteriormente e marcando afinal ditos dias com as epactas de 0 a 29 na ordem decrescente e convenientemente repetidas, até completar as 12 lunações mais 11 dias, se formará a tabela que apresentamos aquí, a qual constitue o Calendário Eclesiástico e cuja disposição resulta em extremo útil, conforme se verá.

Datas	Janeiro 31 dias		Fevereiro 28 ou 29 dias		Março 31 dias		Abril 30 dias	
1	A	0	D	29	D	0	G	29
2	B	29	E	28	E	29	A	28
3	C	28	F	27	F	28	B	27
4	D	27	G	26	G	27	C	26
5	E	26	A	25'24	A	26	D	25'24
6	F	25	B	23	B	25	E	23
7	G	24	C	22	C	24	F	22
8	A	23	D	21	D	23	G	21
9	B	22	E	20	E	22	A	20
10	C	21	F	19	F	21	B	19
11	D	20	G	18	G	20	C	18
12	E	19	A	17	A	19	D	17
13	F	18	B	16	B	18	E	16
14	G	17	C	15	C	17	F	15
15	A	16	D	14	D	16	G	14
16	B	15	E	13	E	15	A	13
17	C	14	F	12	F	14	B	12
18	D	13	G	11	G	13	C	11
19	E	12	A	10	A	12	D	10
20	F	11	B	9	B	11	E	9
21	G	10	C	8	C	10	F	8
22	A	9	D	7	D	9	G	7
23	B	8	E	6	E	8	A	6
24	C	7	F	5	F	7	B	5
25	D	6	G	4	G	6	C	4
26	E	5	A	3	A	5	D	3
27	F	4	B	2	B	4	E	2
28	G	3	C	1	C	3	F	1
29	A	2			D	2	G	0
30	B	1			E	1	A	29
31	C	0			F	0		

Datas	Maio 31 dias		Junho 30 dias		Julho 31 dias		Agôsto 31 dias	
1	B	28	E	27	G	26	C	25'24
2	C	27	F	26	A	25	D	23
3	D	26	G	25'24	B	24	E	22
4	E	25	A	23	C	23	F	21
5	F	24	B	22	D	22	G	20
6	G	23	C	21	E	21	A	19
7	A	22	D	20	F	20	B	18
8	B	21	E	19	G	19	C	17
9	C	20	F	18	A	18	D	16
10	D	19	G	17	B	17	E	15
11	E	18	A	16	C	16	F	14
12	F	17	B	15	D	15	G	13
13	G	16	C	14	E	14	A	12
14	A	15	D	13	F	13	B	11
15	B	14	E	12	G	12	C	10
16	C	13	F	11	A	11	D	9
17	D	12	G	10	B	10	E	8
18	E	11	A	9	C	9	F	7
19	F	10	B	8	D	8	G	6
20	G	9	C	7	E	7	A	5
21	A	8	D	6	F	6	B	4
22	B	7	E	5	G	5	C	3
23	C	6	F	4	A	4	D	2
24	D	5	G	3	B	3	E	1
25	E	4	A	2	C	2	F	0
26	F	3	B	1	D	1	G	29
27	G	2	C	0	E	0	A	28
28	A	1	D	29	F	29	B	27
29	B	0	E	28	G	28	C	26
30	C	29	F	27	A	27	D	25
31	D	28			B	26	E	24

Datas	Setembro 30 dias		Outubro 31 dias		Novembro 30 dias		Dezembro 31 dias	
1	F	23	A	22	D	21	F	20
2	G	22	B	21	E	20	G	19
3	A	21	C	20	F	19	A	18
4	B	20	D	19	G	18	B	17
5	C	19	E	18	A	17	C	16
6	D	18	F	17	B	16	D	15
7	E	17	G	16	C	15	E	14
8	F	16	A	15	D	14	F	13
9	G	15	B	14	E	13	G	12
10	A	14	C	13	F	12	A	11
11	B	13	D	12	G	11	B	10
12	C	12	E	11	A	10	C	9
13	D	11	F	10	B	9	D	8
14	E	10	G	9	C	8	E	7
15	F	9	A	8	D	7	F	6
16	G	8	B	7	E	6	G	5
17	A	7	C	6	F	5	A	4
18	B	6	D	5	G	4	B	3
19	C	5	E	4	A	3	C	2
20	D	4	F	3	B	2	D	1
21	E	3	G	2	C	1	E	0
22	F	2	A	1	D	0	F	29
23	G	1	B	0	E	29	G	28
24	A	0	C	29	F	28	A	27
25	B	29	D	28	G	27	B	26
26	C	28	E	27	A	26	C	25
27	D	27	F	26	B	25'24	D	24
28	E	26	G	25	C	23	E	23
29	F	25'24	A	24	D	22	F	22
30	G	23	B	23	E	21	G	21
31			C	22			A	20

Dado um ano qualquer, por meio das tabelas do Calendário Eclesiástico pode saber-se: 1.°) As datas de todos os domingos, conhecendo a letra dominical do ano de que se tratar e, como conseqüência, o dia da semana que corresponder a qualquer data. 2.°) As fases da lua para todo o ano, mediante a epacta que ao ano em questão corresponde.

Sabendo a dominical de 1915, por exemplo, que é A, veremos na inspeção da coluna do mês de janeiro que as datas 1, 8, 15, 22 e 29 são domingos, porque corresponde dita letra A a todos êles, e nesta mesma forma para os outros meses. (Já temos dito que nos anos bissextos afetados de letras dominicais duplas, a primeira letra serve para janeiro e fevereiro, e a segunda, para o resto do ano).

Com referência à epacta, se soubermos que para 1908, é 24, teremos que a data de cada mês que tenha no calendário eclesiástico dita cifra 24 defronte, será o dia da lua nova ou novilúnio. Isto acontece nos dias sete de janeiro, 5 de fevereiro, 7 de março, etc., que serão, pois dias de lua nova. Para saber as datas das luas cheias se acrescentará 13 às datas das luas novas sendo de observar que estas não são as luas novas astronômicas, senão as eclesiásticas que atrasam de dois dias respeito às primeiras. Se determinarão aproximadamente os quartos crescentes e minguantes, considerando o primeiro eqüidistante da lua nova a lua cheia e o segundo da lua cheia a nova seguinte.

O calendário eclesiástico serve, assim mesmo, como veremos mais adiante, para determinar a festa móvel da Páscoa da Ressurreição.

CALENDÁRIO PERPÉTUO

Como se acaba de ver na epígrafe anterior, por meio das tabelas do Calendário Eclesiástico é fácil calcular o dia da semana correspondente a qualquer data mencionada. Tudo se reduz a saber a letra dominical do ano em questão e a operar conforme se deixa dito. Mas pode simplificar-se de um modo extraordinário o procedimento, fazendo uso das tabelas calculadas a propósito e nas quais não é sequer necessária a letra dominical. Estas tabelas formam o chamado comumente Calendário Perpétuo, e são as que se verá na continuação.

Seu uso não pode ser mais simples, pois se reduz:

1.°) A procurar na tabela I o número colocado na intersecção da linha que contém as cifras do século e da coluna que contém as do ano.

2.°) A transportar o número que resulta à coluna exterior da tabela II e procurar o número que na linha correspondente forma intersecção com a coluna do mês. (Nos anos bissextos se toma para os meses de janeiro e fevereiro as marcadas B).

3.°) e último. A transportar o novo número assim obtido à coluna exterior da tabela III. Na linha marcada com dito número e em sua intersecção com a coluna da data correspondente. teremos o dia da semana que se procurava.

Exemplo: Que dia da semana era o 7 de junho de 1640, data do sangrento episódio ocorrido em Barcelona e conhecido por Corpus de Sangue?

Tabela I. — Linha 16, coluna 40, cifra achada 2
Tabela II. — Linha, coluna junho cifra achada 6
Tabela III. — Linha 6, coluna 7, dia buscado 5.ª-feira.

Efetivamente terá sido uma quinta-feira já que êste é o dia em que, conforme veremos mais adiante, se festeja sempre a solenidade do Corpus.

II MESES

II	Maio	Agôsto Fevereiro B	Fevereiro Março Novembro	Junho	Setembro Dezembro	Abril Junho Janeiro B	Janeiro Outubro
1	2	3	4	5	6	0	1
2	3	4	5	6	0	1	2
3	4	5	6	0	1	2	3
4	5	6	0	1	2	3	4
5	6	0	1	2	3	4	5
6	0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6	0

I

SÉCULOS (a)					ANOS (a)						
					00b	01	02	03		04	05
					06	07		08	09	10	11
						12	13	14	15		16
					17	18	19		20	21	22
					23		24	25	26	27	
					28	29	30	31		32	33
					34	35		36	37	38	39
						40	41	42	43		44
					45	46	47		48	49	50
					51		52	53	54	55	
					56	57	58	59		60	61
					62	63		64	65	66	67
						68	69	70	71		72
					73	74	75		76	77	78
					79		80	81	82	83	
					84	85	86	87		88	89
					90	91		92	93	94	95
						96	97	98	99		
0	7	14	17	21	6	0	1	2	3	4	5
1	8	15b			5	6	0	1	2	3	4
2	9		18	22	4	5	6	0	1	2	3
3	10				3	4	5	6	0	1	2
4	11	15c	19	23	2	3	4	5	6	0	1
5	12	16	20	24	1	2	3	4	5	6	0
6	13				0	1	2	3	4	5	6

DATAS

III	1 8 15 22 29	2 9 16 23 30	3 10 17 24 31	4 11 18 25	5 12 19 26	6 13 20 27	7 14 21 28
1	Domingo	Segunda	Têrça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
2	Segunda	Têrça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo
3	Têrça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo	Segunda
4	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo	Segunda	Têrça
5	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo	Segunda	Têrça	Quarta
6	Sexta	Sábado	Domingo	Segunda	Têrça	Quarta	Quinta
0	Sábado	Domingo	Segunda	Têrça	Quarta	Quinta	Sexta

O Calendário Perpétuo permite também ser empregado para o regime juliano o velho estilo.

Exemplo: O 24 de agôsto de 1572, dia de Santo Bartolomeu ou matança dos protestantes em París. A que dia da semana correspondeu?

Tabela I. — Linha 15 (cifras pequenas, calendário juliano) coluna 72 4
Tabela II. — Linha 4, coluna agôsto, ... 6
Tabela III. — Linha 6, coluna 24, dia procurado: domingo.

Foi, pois, domingo, o dia de Santo Bartolomeu do ano 1572.

Finalmente, por meio das tabelas do calendário perpétuo se resolverão as perguntas inversas como a do seguinte

Exemplo: Qual foi o primeiro ano do século XX em que o dia dos defuntos (2 de novembro) caíu em sexta-feira?

Tabela III. — Coluna 2, baixando até sexta, linha 2.

Tabela II. — Coluna novembro, baixando até o 5, linha 2.

Tabela I. — Linha 19 (século XX) seguindo até o número 2, que se achará na primeira coluna, cujo primeiro ano depois de 00 (1900 o fim do século XIX) é o 06. O ano 1906 é, pois, o ano buscado.

Notas. —

a) Até o dia 4 de outubro de 1582 inclusive em que terminou o regime do calendário juliano.

b) Desde o dia 15 de outubro de 1582 inclusive em que começa o calendário gregoriano. (As datas de 5 a 14 de outubro de 1582 não existem neste calendário).

c) Os anos centenários ou seculares, que no calendário juliano eram sempre bissextos, no calendário gregoriano o são sòmente quando são divisíveis por 400.

Com referência à tabela do calendário eclesiástico, acusa para o mês de março lua nova o dia 7. Juntando 14, obteremos 20 para o dia de lua cheia; mas como esta é anterior ao dia do equinócio, que é 21 de março, não é a lua cheia que nos convém, senão que terá de ser a seguinte. Passemos com a epacta 24 ao mês de abril e acharemos esta para o dia 5; juntando 13 teremos 18. O dia 17 é, pois, a primeira lua cheia depois do equinócio.

Por outra parte, temos que a dominical do próprio ano 1905 é a letra A. Como temos visto, todos os domingos do dito ano

tiveram de ter a letra A nas tabelas do calendário eclesiástico, e como o dia 18 de abril, data calculada do plenilúnio, está marcada com a letra C, teremos que seguir até achar o A, ou seja o dia 23. **Assim sendo, o domingo 23 de abril de 1905, foi Páscoa da Ressurreição.**

FESTAS FIXAS E FESTAS MÓVEIS.

As festividades que comemora a igreja se chamam fixas se correspondem constantemente a um mesmo dia do ano, e móveis quando a data de sua celebração varia por determinadas circunstâncias.

Com respeito as festas fixas veja-se a lista das principais:

✠	Circuncisão do Senhor	1 janeiro
✠	Epifânia ou Adoração dos Santos Reis	6 janeiro
✠	Purificação de Nossa Senhora	2 fevereiro
✠	São José	19 março
✠	Anunciação de Nossa Senhora	25 março
✠	Natividade de São João Batista	24 junho
✠	São Pedro e São Paulo	29 junho
	Visitação de Nossa Senhora	2 julho
✠	Santiago o Maior	25 julho
	Transfiguração do Senhor	6 agôsto
✠	Assunção de Nossa Senhora	15 agôsto
✠	Natividade de Nossa Senhora	8 setembro
✠	Todos os Santos	1 novembro
	Apresentação de Nossa Senhora	21 novembro
✠	Puríssima Conceição de Nossa Senhora	8 dezembro
✠	Natividade de N. Senhor Jesús-Cristo	25 dezembro

As marcadas ✠ são de preceito.

Com respeito às festas móveis há que considerar:

1.°) A Páscoa da Ressurreição, cuja celebração pelo acôrdo do concílio de Nicea, corresponde ao domingo imediato posterior à lua cheia ou plenilúnio, que ocorra depois do equinócio de Primavera. Dito equinócio, segundo o próprio concílio, se fixou no 21 de março; daquí, pois que se num determinado ano caí a lua cheia, o 21 de março, sendo êste um sábado, o dia seguinte 22 de março será Páscoa; mas se o dia 21 fôsse domingo, seria Páscoa

TABELA PERPÉTUA DA PÁSCOA E FESTAS DERIVADAS

Letra Dominical	EPACTAS	Septuagésima	Qüinquagésima	Cinzas	Domingo da Paixão	Domingo de Ramos	Páscoa	Quasímodo	Ascenção do Senhor	Pentecostés	Corpus Christi
D E D	23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 29, 28, 27, 26, XXV, 25, 24,	18 Janeiro 25 " 1 Fevereiro 8 " 15 "	1 Fevereiro 8 " 15 " 22 " 1 Março	4 Fevereiro 11 " 18 " 25 " 4 Março	8 Março 15 " 22 " 29 " 5 Abril	15 Março 22 " 29 " 5 Abril 12 "	22 Março 29 " 5 Abril 12 " 19 "	29 Março 5 Abril 12 " 19 " 26 "	30 Abril 7 Maio 14 " 21 " 28 "	10 Maio 17 " 24 " 31 " 7 Junho	21 Maio 28 " 4 Junho 11 " 18 "
E F E	23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 29, 28, 27, 26, XXV, 25, 24,	19 Janeiro 26 " 2 Fevereiro 9 " 16 "	2 Fevereiro 9 " 16 " 23 " 2 Março	5 Fevereiro 12 " 19 " 26 " 5 Março	9 Março 16 " 23 " 30 " 6 Abril	16 Março 23 " 30 " 6 Abril 13 "	23 Março 30 " 6 Abril 13 " 20 "	30 Março 6 Abril 13 " 20 " 27 "	1 Maio 8 " 15 " 22 " 29 "	11 Maio 18 " 25 " 1 Junho 8 "	22 Maio 29 " 5 Junho 12 " 19 "
F G F	23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 29, 28, 27, 26, XXV, 25, 24,	20 Janeiro 27 " 3 Fevereiro 10 " 17 "	3 Fevereiro 10 " 17 " 24 " 3 Março	6 Fevereiro 13 " 20 " 27 " 6 Março	10 Março 17 " 24 " 31 " 7 Abril	17 Março 24 " 31 " 7 Abril 14 "	24 Março 31 " 7 Abril 14 " 21 "	31 Março 7 Abril 14 " 21 " 28 "	2 Maio 9 " 16 " 23 " 30 "	12 Maio 19. " 26 " 2 Junho 9 "	23 Maio 30 " 6 Junho 13 " 20 "
G A G	23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 29, 28, 27, 26, XXV, 25,24,	21 Janeiro 28 " 4 Fevereiro 11 " 18 "	4 Fevereiro 11 " 18 " 25 " 4 Março	7 Fevereiro 14 " 21 " 28 " 7 Março	11 Março 18 " 25 " 1 Abril 8 "	18 Março 25 " 1 Abril 8 " 15 "	25 Março 1 Abril 8 " 15 " 22 "	1 Abril 8 " 15 " 22 " 29 "	3 Maio 10 " 17 " 24 " 31 "	13 Maio 20 " 27 " 3 Junho 10 "	24 Maio 31 " 7 Junho 14 " 21 "
A B A	23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 29, 28, 27, 26, XXV, 25, 24,	22 Janeiro 29 " 5 Fevereiro 12 " 19 "	5 Fevereiro 12 " 19 " 26 " 5 Março	8 Fevereiro 15 " 22 " 1 Março 8 "	12 Março 19 " 26 " 2 Abril 9 "	19 Março 26 " 2 Abril 9 " 16 "	26 Março 2 Abril 9 " 16 " 23 "	2 Abril 9 " 16 " 23 " 30 "	4 Maio 11 " 18 " 25 " 1 Junho	14 Maio 21 " 28 " 4 Junho 11 "	25 Maio 1 Junho 8 " 15 " 22 "
B C B	*23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 29, 28, 27,* 26, XXV, 25, 24,	*23 Janeiro 30 " 6 Fevereiro 13 " 20 "*	*6 Fevereiro 13 " 20 " 27 "* 6 Março	9 Fevereiro 16 " 23 " 2 Março 9 "	13 Março 20 " 27 " 3 Abril 10 "	20 Março 27 " 3 Abril 10 " 17 "	27 Março 3 Abril 10 " 17 " 24 "	3 Abril 10 " 17 " 24 " 1 Maio	5 Maio 12 " 19 " 26 " 2 Junho	15 Maio 22 " 29 " 5 Junho 12 "	26 Maio 2 Junho 9 " 16 " 23 "
C D C	23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 29, 28, 27, 26, XXV, 25, 24,	24 Janeiro 31 " 7 Fevereiro 14 " 21 "	7 Fevereiro 14 " 21 " 28 " 7 Março	10 Fevereiro 17 " 24 " 3 Março 10 "	14 Março 21 " 28 " 4 Abril 11 "	21 Março 28 " 4 Abril 11 " 18 "	28 Março 4 Abril 11 " 18 " 25 "	4 Abril 11 " 18 " 25 " 2 Maio	6 Maio 13 " 20 " 27 " 3 Junho	16 Maio 23 " 30 " 6 Junho 13 "	27 Maio 3 Junho 10 " 17 " 24 "

A tabela que vai nesta página tem por objeto evitar todo cálculo ao determinar as datas das festas móveis (Páscoa e as que dependem dela) em qualquer ano que seja. Já temos visto, ao tratar das festas da Páscoa, que classe de elementos servem para fixá-la, e como, possuindo-os, se determina a data valendo-se do calendário eclesiástico. Êste trabalho torna-se muito mais fácil por meio da referida tabela, conforme se desprende da explicação para seu uso.

Ter-se-á de determinar para o ano 1905, como da outra vez a data da Páscoa e ao mesmo tempo as datas das outras festas que dependem dela? Sabendo que em dito ano é dominical a letra A e 24 a epacta que ao mesmo corresponde, procuraremos o A na primeira coluna da tabela marcada "Letra Dominical", e, no grupo de epactas na coluna imediata enfrente ao A, a epacta 24.

Uma vez achada esta, seguiremos a linha em que se encontra e leremos dentro da coluna de cada festa a data correspondente a saber: Septuagésima, 19 de fevereiro; Qüinquagésima, 5 de março; Cinzas, 8 de março; Domingo da Paixão, 9 de abril; Domingo de Ramos, 16 de abril; Páscoa, 23 de abril (comprovando o cálculo que fizemos sôbre o calendário eclesiástico) Quasímodo, 30 de abril; Ascensão, 1.º de junho; Pentecostes, 11 de junho; Corpus Christi, 22 de junho.

Portanto, conforme as notas ao pé da tabela, sendo o 16 de abril, Domingo de Ramos, no dia 14 será as Dores de Nossa Senhora sendo Páscoa o 23 de abril, os dias 20, 21 e 22, serão quinta, sexta-feira e sábado Santos; sendo Quasímodo o dia 30 de abril, será o Patrocínio de São José o 14 de maio; e sendo Corpus o 22 de junho, o 18 e 30 do mesmo serão, respectivamente, a Trindade e o Sagrado Coração de Jesús.

NOTAS — Quando o ano é bissexto (dominical duplo) as datas da Septuagésima, Qüinquagésima e Cinzas tem que serem aumentadas de um dia se correspondem a janeiro ou fevereiro.
A sexta-feira das Dores de Nossa Senhora, será dois dias antes do Domingo de Ramos.
A quinta e sexta-feira e sábado santos são respectivamente três, dois e um dia antes da Páscoa.
O Patrocínio de São José é o segundo domingo ou quatorze dias depois de Quasímodo.
A Santíssima Trindade, o domingo, quatro dias antes do Corpus.
O Sagrado Coração de Jesús oito dias depois do Corpus, numa sexta-feira.

o domingo seguinte, dia 28. Se em vez de ser lua cheia o mesmo dia 21 de março o tivesse sido o dia anterior, a Páscoa deveria contar-se a partir da lua cheia do mês de abril (a primeira depois do equinócio) que em dito caso seria o 18; se êste fôsse um sábado o dia seguinte, 19, seria o domingo de Páscoa; mas se dito dia 18 fôsse domingo, não seria festa até o domingo seguinte, ou seja 25 de abril. Assim pois, o 22 de março e o 25 de abril marcam o intervalo em que pode oscilar a festa de Páscoa, ou sejam 5 datas; jamais antes nem depois daqueles limites. Exemplo: Seja o ano 1905. Que dia foi a Páscoa? A epacta de dito ano é 24, que

2.°) AS FESTAS MÓVEIS **que dependem do dia da Páscoa,** e que se encontram separadas dêste por intervalos fixos, anteriores ou posteriores, são as seguintes:

Domingo de Septuagésima, 63 dias antes da Páscoa.

Domingo de Qüinquagésima (Carnaval), 49 dias antes da Páscoa.

Quarta-feira de Cinzas, 45 dias antes da Páscoa.

Domingo da Paixão, 14 dias antes da Páscoa.

Sexta-feira das Dores de Nossa Senhora, 9 dias antes da Páscoa.

Domingo de Ramos, 7 dias antes da Páscoa.

Sexta-feira Santa, 2 dias antes da Páscoa.

Domingo de Quasímodo, 7 dias depois da Páscoa.

Patrocínio de São José, 21 dias depois da Páscoa.

✠ Ascensão do Senhor, 39 dias depois da Páscoa.

Pentecostes, 49 dias depois da Páscoa.

Santíssima Trindade, 55 dias depois da Páscoa.

✠ Corpus Christi, 60 dias depois da Páscoa.

Sagrado Coração de Jesús, 68 dias depois da Páscoa.

3.°) AS FESTAS MÓVEIS **que dependem da letra dominical do ano,** são as que, tendo que festejar-se em determinado dia da semana, percorrem um intervalo de sete datas.

Santíssimo Nome de Jesús, segundo domingo depois dos Reis.

Preciosíssimo Sangue de Jesús, primeiro domingo de julho.

São Joaquim, primeiro domingo depois da Assunção.

Puríssimo Coração de Maria, segundo domingo depois da Assunção.

Nossa Senhora da Consolação, domingo mais próximo ao 31 de agôsto.

SANTIFICADOS QUE VARIAM SEGUNDO A LETRA DOMINICAL

Letra Dominical	Santíssimo Nome de Jesus	Preciosíssimo Sangue de Jesus	São Joaquim	Puríssimo Coração de Maria	Nossa Senhora da Consolação	Dulcíssimo Nome de Maria	Dores Gloriosas de N. Senhora	Nossa Senhora do Rosário	Patrocínio de Nossa Senhora	Primeiro domingo de Advento
	Jan.	Jul.	Agôs.	Agôs.	Set.	Set.	Set.	Out.	Nov.	
A B A	15 16	2	20	27	3	10	17	1	12	3 Dez.
B C B	16 17	3	21	28	4	11	18	2	13	27 Nov.
C D C	17 18	4	22	29	29	12	19	3	14	28 "
D E D	18 19	5	16	23	30	13	20	4	8	29 "
E F E	19 20	6	17	24	30	14	21	5	9	30 "
F G F	20 14	7	18	25	1	15	22	6	10	1 Dez.
G A G	14 15	1	16	26	2	12	15	7	11	2 "

Dulcíssimo Nome de Maria, primeiro domingo depois da Natividade de Nossa Senhora.

Dores Gloriosas de Nossa Senhora, segundo domingo depois da Natividade de Nossa Senhora.

Nossa Senhora do Rosário, primeiro domingo de outubro.

Patrocínio de Nossa Senhora, segundo domingo de novembro.

Primeiro domingo de Advento, domingo mais próximo ao 30 de novembro.

QUATRO TÊMPORAS.

I. O 16, 18 e 19 de fevereiro
II. O 18, 20 e 21 de maio
III. O 21, 23 e 24 de setembro
IV. O 14, 16 e 17 de dezembro.

DIAS DE "SACAR ANIMAS"

O 23 de janeiro; o 15, 26 e 27 de fevereiro; o 6, 18, 19 e 30 de março; e 19 e 21 de maio.

CALENDÁRIO DA IGREJA ORTODOXA.

O calendário juliano, antes da correção gregoriana, foi aceito pelos russos, os gregos, armênios, georgianos, sírios não unidos, coptas, sérvios, montenegrinos, búlgaros e rumenos. Os armênios e os coptas teem um santoral que os distingue dos outros ortodoxos.

CALENDÁRIO DA IGREJA DE MILÃO.
(Rito Ambrosiano)

Sabe-se que a igreja católica de Milão tem um rito especial, instituído, parece, por Santo Ambrósio.

No calendário, as diferenças principais dignas de ter-se em conta são as seguintes:

1.°) O primeiro dia da Quaresma cai no primeiro domingo de março. O chamado "carnevalone ambrosiano" se festeja nos três dias subseqüentes à quarta-feira de cinzas do rito romano.

2.°) As súplicas da "letania ambrosiana" caem na segunda, têrça e quarta-feira que se seguem imediatamente ao primeiro domingo depois da Assunção. No primeiro dêsses três dias se dão as cinzas, que no rito romano se dão na quarta-feira de cinzas

3.°) Em vez de quatro domingos, o Advento tem seis; o primeiro é o que segue imediatamente a 11 de novembro (festa de São Martinho).

CALENDÁRIO PROTESTANTE.

As diversas confissões protestantes se regem pelo calendário Gregoriano, e combinam, o mesmo que nós, a Páscoa e as festas móveis; porém excluem as solenidades dos Santos e da Virgem. Celebram o Domingo da Paixão (9 de abril); o Domingo de Ramos (16 de abril) e a Sexta-feira santa (21 de abril).

Por sua parte também, a igreja protestante alemã (luteranos) tem as seguintes festas móveis:

Dia de Penitência e Rogatória — Corresponde a quarta-feira depois do primeiro domingo de Quaresma, se esta quarta cai em fevereiro; ou a Têrça-feira depois do mesmo domingo se esta Têrça cai em março.

Festa dos meses — E' o domingo imediato a 30 de setembro, ou o mesmo dia se cai em domingo.

Festa da Reforma — Corresponde ao domingo imediato posterior ao 30 de outubro ou o mesmo dia se cai em domingo.

A Comemoração dos Mortos — Corresponde ao domingo imediato, posterior ao 20 de novembro, ou o mesmo dia se cai em domingo.

DEUSES QUE PRESIDEM OS MESES DO ANO.
(Segundo os Romanos)

O deus Jano, preside o mês de janeiro.
O deus Netuno, preside o mês de fevereiro.
A deusa Minerva, preside o mês de março.

A deusa Vênus, preside o mês de abril.
O deus Apolo, preside o mês de maio.
O deus Mercúrio, preside o mês de junho.
O deus Júpiter, preside o mês de julho.
A deusa Ceres, preside o mês de agôsto.
O deus Vulcano, preside o mês de setembro.
O deus Marte, preside o mês de outubro.
A deusa Diana, preside o mês de novembro.
A deusa Vesta, preside o mês de dezembro.

COMO SE SABE SE UM ANO É, FOI, OU SERÁ BISSEXTO?

Por meio de uma regra aritmética simplicíssima. Dividindo por dois, ou seja, tirando a metade da cifra do ano que desejamos averiguar. Se nos dá uma quantidade cuja última cifra seja par, o ano é bissexto.

Exemplo: Queremos saber se o ano da guerra franco-alemã, em 1870, foi bissexto? Diremos:

$$\frac{1870}{935} \quad {}^1/_2$$

Resultado número impar; não foi bissexto.

Desejamos averiguar se o é o ano de 1940?

Diremos:

$$\frac{1940}{970} \quad {}^1/_2$$

Resulta número par; é pois ano bissexto.

Nota. — As referências eclesiásticas e astronômicas foram reproduzidas no "Año en la Mano".

GRAÇEJO MATEMÁTICO.

Quantos filhos precisaria ter a espôsa de Mr. Thiers, para que toda a família compusesse a unidade?

Êste gracejo matemático corria de bôca em bôca na época em que Mr. Thiers era primeiro ministro do Império Francês e está baseado num "calambour" do significado do sobrenome de Mr. Thiers.

Efetivamente, Thiers em francês significa um têrço, de modo que sabido isto podemos apresentar os dados do problema.

Ei-los aquí:

Mr. Thiers = 1/3
Sua cara metade (Espôsa) 1/6
Seus filhos = x

(por ser a "cara metade" de M. Thiers, (a-pesar-de no belo sexo, haver maioria que vale tanto ou mais que os homens). (se põe cara metade por requerê-lo assim os dados do problema e com todo o respeito devido às senhoras).

De modo que a equação é a seguinte:

$1/3 + 1/6 + x = 1$ e sucessivamente $x = 1 - (1/3 + 1/6)$ e como $1/3 = 2/6$ fica o valor de $x = 1 - 3/6$ e $x = 1 - 1/2$ e como resultado $x = 1/2$ ou seja, em definitivo, que a espôsa de Mr. Thiers precisaria ter 1/2 filho para que toda a família compusesse a unidade.

A DIVISÃO INSUSPEITÁVEL.

Uma menina e um menino receberam, para repartir entre 7 camaradas a quantia de 28 laranjas.

Na crença de que poderiam fazer a operação, para distribuir as laranjas que correspondiam a cada um dêles, dispuseram o problema perfeitamente bem, do modo seguinte:

N.° 1

```
2,8 | 7
    |---
    | 1
```

e começaram dizendo 8 por 7 vai 1 que escreveram. (N.° 1)

Então prosseguiram dizendo: 1 × 7 igual 7 ou seja 8 — 7 igual 1 que escreveram debaixo do 8 tal como ve-se na demonstração N.° 2.

N.° 2

```
28 | 7
   |---
 1 | 1
```


Agora continuando a fazer a operação baixaram o 2 ao lado esquerdo de modo que ficou conforme demostramos: (N.° 3)

N.° 3

```
28 | 7
   |---
21 | 1
```

Depois operaram dizendo: 21 : 7 = 3 que escreveram na esquerda do 1 e continuaram: 3 × 7 = 21 então 21 — 21 = 0 que escreveram como definitivo da operação.

```
28 | 7
   |---
21 | 31
 0
```

A estupefação dêles não podia ser maior, pois reconheceram que tinham de repartir 31 laranjas a cada um dos 7 camaradas, sendo que sòmente haviam recebido 28. Pensaram em fazer a prova, que é o que precisa toda operação, para certificar-se de que está bem feita.

Dêsse modo acharam imprescindível multiplicar o quociente pelo divisor para terem o valor do dividendo, o qual indicava-lhes as laranjas que tinham.

Resolveram fazê-lo assim, e operaram da maneira seguinte:

```
28 | 7
   |---
31 | 31
 0   ×7
```

7 × 1 = 7 que escreveram debaixo assim:

```
28 | 7
   |---
21 | 31
 0   ×7
     ---
      7
```

e continuaram 3 × 7 = 21 que escreveram como segue:

```
28 | 7
   |---
21 | 31
 0   ×7
     ---
      7
     21    (Não correram a ordem)
     ---
e ao somar tinham  28
```

ou seja o número de laranjas exato, e ante tal solução ficaram perplexos e sem atinar o que deviam fazer. Não podendo achar o êrro, chamaram outro camarada a quem expuzeram tal situação confusa.

Êste aconselhou-os a fazerem nova prova, tendo como base a que já tinham feito primeiramente, baseando-se em que quando se tem multiplicando e multiplicador em uma operação, cada um dêles indica as vezes que o outro pode ser tomado como somando, quer dizer, neste caso, concreto, o 7 poderia ser tomado 31 vezes como somando e o 31, 7 vezes como tal.

Tomaram por ser mais curto o processo: 31 sete vezes, como somando e operaram da seguinte maneira:

31	Começando debaixo para cima ou ao contrário de
+ 31	cima para baixo:
+ 31	
+ 31	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 mais
+ 31	3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 28 ou seja
+ 31	o mesmo valor exato das laranjas que possuíam.
+ 31	
—	
28	

Naturalmente que tudo isto era calculado arbitràriamente pois os rapazes tinham-se esquecido de como precisavam desenvolver o cálculo exatamente, o que em realidade é:

```
28 | 7
   |---
 0 | 4
 —
```

resolvendo assim repartir as laranjas pràticamente, dando 1 a cada camarada e depois outra e assim sucessivamente.

Como é natural, tocou 4 a cada um.

OUTRO CASO SIMILAR

Estavam 5 ministros de um Estado reünidos e como tinham que calcular o orçamento estipularam o ordenado de cada um dêles. Opinaram conjuntamente que 20 contos era razoável e

deram liberdade ao secretário para que êste descriminasse a quantia que devia receber cada ministro, o que foi feito da seguinte maneira:

Ao 1.° Ministro	13 contos
Ao do Interior	13 "
Ao do Comércio	13 "
Ao da Indústria	13 "
Ao da Justiça	13 "
	—
e somou em total	20 contos

conforme o acôrdo dos ministros

Para obter aquele resultado o secretário tinha operado assim: 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15 mais 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20.

Assim foi consignado na lista do orçamento, mas ao revisá-lo se deram conta do êrro pois havia 65 contos, cuja soma não era a verdadeira dos ordenados que se propuseram os ministros.

PROVÉRBIO ÁRABE

Aquele que sabe e não sabe que sabe, está dormindo. **Acorda-o.**

Aquele que não sabe e sabe que não sabe, é uma alma simples. **Ensina-lhe.**

Aquele que não sabe e não sabe que não sabe, é um tonto. **Desdenha-o.**

Aquele que sabe e sabe que sabe, é um sábio. **Segue-o até o fim.**

Um cubo de ouro de 35 centímetros pesa 1 tonelada.

NÚMEROS EM QUICHUA

Huc	1	Zocta	6
Yscay	2	Chanchis	7
Kinza	3	Puzac	8
Tawa	4	Iscon	9
Pichca	5	Chunca	10

Quantos dias tem um ano?

O ano comum tem 365 dias e 1/4.
O ano do calendário 365 dias (o regular ou comum)
O ano bissexto 366 dias.
O ano lunar 354 dias.
O ano Gregoriano 365 dias 5 horas 49′ 12″.
O ano solar 365 dias 5 horas 48′ 46″.
O ano sideral 365 dias 6 horas 9′ 9″.
O ano anômalo 365 dias 6 horas 13′ 53″.

O HOMEM QUE ROUBOU OS DIAS, CÉSAR AUGUSTUS, IMPERADOR ROMANO.

Mudou o 29 de fevereiro para o dia 31 de agôsto.
Mudou o 31 de setembro para o dia 31 de outubro.
Mudou o 31 de novembro para o dia 31 de dezembro.

César Augustus procedeu assim porque o mês de agôsto cujo nome foi dado em homenagem a êle, tinha sòmente 30 dias, ao passo que o mês de julho, que honrava a memória de Júlio Cesar tinha 31 dias.

A milha terrestre é igual a 1609,32 metros; a milha náutica ou geográfica mede 1851,85 metros e o nó tem 2805,32 metros.

CALCULAR UM NÚMERO PENSADO

Pense-se num número, multiplique-se mentalmente por 3, ajunte-se 1 ao resultado; torne-se a multiplicar por 3 e ao produto some-se o número pensado.

Diga-se o total desta soma e risque-se da mesma o último algarismo que ficará o número pensado.

Pode ser qualquer número.

BANQUETE GRATIS.

17 estudantes que tinham finalizado seus estudos em diferentes faculdades combinaram reünir-se num dos principais restaurantes da cidade com o propósito de celebrar entre camaradas, tão grande acontecimento

Encomendaram uma opípara ceia, banqueteando-se animadíssimos numa atmosfera de optimismo extraordinário.

Um dêles, excelente matemático, sugeriu aos companheiros a idéia de convidarem o dono do estabelecimento ao almôço e se êste aceitasse veriam-se livres de pagar a despesa que tivessem feito na casa.

Todos de acôrdo já, delegaram poderes a outro camarada para que, junto com o autor da idéia, convidassem o dono a ir à mesa, encargo que cumpriram, tendo aceitado o dono ao convite, encantado com a gentileza dos rapazes.

Sentados à mesa e depois de transcorrida a ceia em franca camaradagem e entusiasmo, começaram os brindes para felicitarem-se e desejarem-se toda sorte de felicidades e prosperidades, no transcurso da atuação e orientação que na vida cabia-lhes desde aquele momento.

Terminado já o ágape num ambiente cheio de ilusões e entusiasmo, levantou-se o que chamaremos de matemático e propôs que já que havia essa alegria entre todos êles, que fôsse um só quem devia pensar em efetivar o pagamento, ficando os outros isentos das preocupações a que obriga a parte tangível da realidade da vida.

Disse-lhes que seriam contados de um a um, até sete, ficando êste isento de pagar e seguiriam assim, até ficar um só dos comensais.

Aceitaram a idéia todos os concorrentes, inclusive o dono do restaurante, pensando êste, que seria muita casualidade que tocasse a êle pagar, maxime considerando a camaradagem que os estudantes tinham feito com êle.

Deseja-se saber qual é o número de ordem que ocupava o dono à mesa, supondo-se que foi êle o atingido pelo número fatal, coisa que não pôde se explicar até hoje, e que não lhe teria causado admiração se soubesse que o proponente da idéia era um dos melhores matemáticos saídos da faculdade.

Solução: O dono ocupava o número 9. Efetivamente, escrevemos os 18 números e começando a contar do número 1 teremos:

1, 2, 3, 4, 5, 6 e **7** que fica isento da paga, contaremos até 7 mais e teremos: 8, 9, 10, 11, 12, 13 e **14** que é outro dos favorecidos; mais 7 e diremos: 15, 16, 17, 18, 1, 2 e **3**, que fica eliminado, como serão todos os números que seguem e que assinalamos com negrito supondo que ao contar ocupem o lugar do número 7. Efetivamente prosseguindo a operação teremos: 4, 5, 6, 8, 9, 10 e **11**; 12, 13, 15, 16, 17, 18 e **1**; 2, 4, 5, 6, 8, 9 e **10**; 12, 13, 15, 16, 17, 18 e **2**; 4, 5, 6, 8, 9, 12 e **13**; 15, 16, 17, 18, 4, 5 e **6**; 8, 9, 12, 15, 16, 17 e **18**; 4, 5, 8, 9, 12, 15 e **16**; 17, 4, 5, 8, 9, 12 e **15**; 17, 4, 5, 8, 9, 12 e **17**; 4, 5, 8, 9, 12, 4 e **5**; 8, 9, 12, 4, 8, 9 e **12**; 4, 8, 9, 4, 8, 9, e **4** e como última operação 8, 9, 8, 9, 8, 9 e **8**.

Em resumo os estudantes ficaram livres de pagarem a conta, pois o número 9 correspondeu ao hoteleiro, tendo êste que conformar-se e agüentar com a despesa.

ADVERTENCIA

A pedido de pessoas que conhecem a publicação dêste livro e também a título de curiosidade e especialmente para demonstrar o que se pode fazer servindo-se de abreviações de cálculos que se pratiquem com constância (e com o que se logrará operar muitas vezes mentalmente com grande resultado), vamos dar detalhes sintéticos da atuação calculística do autor, (perdoem a irreverência), que viajou por todos os continentes e dissertou dando conferências desta especialidade nas principaes cidades do mundo. Mas vamos concretizar, para não tornar mais extensa esta secção e deixar constatada a opinião e os conceitos de alguns periódicos do Brasil e da Argentina por serem ambas Nacões limítrofes.

Não é pois por egolatria que se explica, e sim pelo que ficou exposto e que pode servir de estímulo a esta pléiade de jovens estudiosos, entusiastas e cultíssimos que temos tido a satisfação e a honra de conhecer e o prazer de tratar pessoalmente com muitos dêles.

OPINIÕES DOS JORNAIS DE PÔRTO-ALEGRE

UM CALCULISTA QUE ASSOMBRA!

O engenheiro José Clotet, o Mágico dos números — Uma visita ao "Jornal da Manhã" — Quinta-feira próxima êle fará uma demonstração pública, na Sociedade Espanhola

Encontra-se nesta capital, conforme noticiamos, o engenheiro espanhol dr. José Clotet, verdadeiro assombro em cálculos, tendo conquistado fama mundial, causando admiração a todos que tiveram ocasião de assistir às suas demonstrações.

Possuïdor de um cérebro privilegiado, o dr. Clotet faz cálculos relâmpagos, soluções de raízes quadradas, cúbicas, quintas, etc.

Ontem, o engenheiro José Clotet, em companhia de membros da colônia espanhola desta capital, esteve em nova visita ao "Jornal da Manhã", fazendo longas demonstrações da sua admirável capacidade mental.

Quinta-feira próxima, no salão de festas da Sociedade Espa-

nhola, às 21 horas, o nosso ilustre visitante realizará uma demonstração pública.

Os jornais de Montevidéu e Buenos-Aires tecem-lhe inúmeros e merecidos elogios. Apresentamos aos nossos leitores as linhas seguintes, de um matutino platino:

"EXTRAORDINÁRIA MEMÓRIA

O engenheiro Clotet possue uma memória sem igual. Sua confiança nela leva-o às mais arriscadas provas, como seja recitar 20.000 números dfierentes, em três sessões de três horas cada uma.

Na Faculdade de Engenharia de Buenos Aires, fez uma prova também temerária, ao aceitar a competição de quatro máquinas calculadoras, manejadas por peritos. Sôbre cincoenta operações apresentadas em um quadro negro, por engenheiros, e cuja solução se pedia dando às máquinas soluções alternadas, isto é, a número 1 faria de 1 a 12, a 2 de 13 a 25, a 3 de 26 a 37, e a 4 de 37 a 50, de modo que as máquinas trabalhariam cada uma problemas diferentes até chegar aos cincoenta pedidos.

À voz de pronto, voltou-se a lousa, mostrando à platéia as operações. O resultado foi grande, pois os problemas o eram também. Quando o calculista Clotet gritou "pronto" já tinha os cincoenta resultados, enquanto que as quatro máquinas sòmente tinham resolvido 27".

AS CONFERÊNCIAS DO PROFESSOR CLOTET

Na série de conferências que o professor Clotet, famoso calculista e conhecedor da matemática, vem realizando nesta capital, com o mais absoluto sucesso, a realizada, ante-ontem, na Escola de Engenharia foi a que maior relêvo e significação teve.

Reüniram-se, alí, os mais destacados engenheiros de Pôrto-Alegre, homens que vivem devotados à sua profissão, voltados sempre para o estudo, e que, no decorrer da conferência, não conseguiram ocultar seu entusiasmo pelo trabalho do notável calculista.

Na Escola de Engenharia, a conferência fugiu dos passa-tempos aritméticos para transformar-se numa legítima exibição científica, na alta acepção do vocábulo. Porisso mesmo, a ovação recebida pelo professor Clotet, quando a assistência se manteve em pé, por vários minutos, deflagrando uma salva prolongada de palmas, valeu pela maior vitória alcançada no Rio-Grande pelo acatado professor e engenheiro. (Do Diário de Notícias)

O ENGENHEIRO CLOTET REALIZOU, ANTE-ONTEM, SUA ANUNCIADA CONFERÊNCIA

O professor José Clotet realizou, ante-ontem, sua anunciada conferência.

Para todos aqueles que tiveram a ventura de cercar, nestes dias de sua visita a Pôrto-Alegre, o notável engenheiro espanhol, o extraordinário sucesso alcançado pela sua serata não foi surpresa alguma.

Nesta fase em que as conferências começam a perder muito do seu encanto, o sábio matemático e insigne calculista teve ante-ontem, em tôrno de si, uma assistência que não sabia mais como exteriorizar seus aplausos, tal a verdadeira eletrização de que se achava possuída.

Efetivamente, Clotet é homem para assombrar mesmo os iniciados na matéria. Com uma facilidade e rapidez de raciocínio assombrosas, Clotet domina a matemática.

Outra não foi, aliás, a impressão que êle deixou na assistência, sua conferência de ante-ontem, que teve a virtude de revelar a Pôrto-Alegre essa assombrosa organização mental que é o professor Clotet.

Os seus ouvintes, dos mais ilustres que Pôrto-Alegre possue, ficaram sequiosos — e êsse é o têrmo exato — da sua dissertação clara e brilhante, à espera da reprodução da noitada de sua estranha ciência.

Entre as inúmeras pessoas de destaque que assistiram a conferência do dr. Clotet contavam-se o general Parga Rodrigues, comandante da Região Militar, professor Alexandre Martins, presidente da Sociedade de Engenharia, sr. Ezequiel Maristany e outros.

O dr. José Clotet recebeu, ao terminar, cumprimentos entusiásticos de todos os presentes.

(Do Correio do Povo)

SONETO

(Do album de viagem do Eng. Clotet e dedicado ao mesmo)

Jogas com a substância do número infinito;
o elevas, o contrais, o transformas, o amplias:
O cálculo e suas fórmulas convertes em um mito
E fazes com quantidades divinas poesias

Demonstras que a mente do homem é poderosa
que mede em rápido voo quase o imensurável,
e rimas a beleza do que ontem foi prosa,
para quem ignorava tua magia incomparável.

E já que nos deixaste a visão da tua ciência,
e que foste nosso hospede uma vez na vida,
recorda, lá nas horas de longinqua ausência,

que encontraste inquietude e sentiste apetência
de cultura e progresso, profundamente sentida,
nesta Cidade nossa, no mundo perdida.

Ramiro L. Suárez
Villa Maria (Argentina)

Tradução: Santich & Comas
Uruguaiana

José Clotet

SONETO

(Do album de viagem do Eng. Clotet e dedicado ao mesmo)

Jogas com a substância do número infinito;
o elevas, o contrais, o transformas, o amplias:
O cálculo e suas fórmulas convertes em um mito
E fazes com quantidades divinas poesias

Demonstras que a mente do homem é poderosa
que mede em rápido voo quase o imensurável,
e rimas a beleza do que ontem foi prosa,
para quem ignorava tua magia incomparável.

E já que nos deixaste a visão da tua ciência,
e que foste nosso hospede uma vez na vida,
recorda, lá nas horas de longínqua ausência,

que encontraste inquietude e sentiste apetência
de cultura e progresso, profundamente sentida,
nesta Cidade nossa, no mundo perdida.

Ramiro L. Suárez
Villa Maria (Argentina)

Tradução: Santich & Comas
Uruguaiana

José Clotet

A PROPOSITO DOS GRANDES CALCULISTAS

A mais estupenda maravilha criada pela natureza, é o cérebro humano. Ao seu lado tornam-se insignificantes os outros prodígios do céu e da terra. O cérebro tanto quanto sabemos, é o órgão da conciência e da alma, e não sofrendo nossa espécie nenhuma mudança, a conciência ou a alma será o único objeto de estudo verdadeiramente importante para o homem a quem inspire respeito a jerarquia dos valores.

Tudo o que chamamos cultura é o resultado de uma longa e afanosa luta entre o cérebro humano e as circunstâncias naturais ou sociais preexistentes. Desertar do combate, renunciando ao esfôrço cerebral e substituindo-o por um preguiçoso amoldamento da conciência ao puramente circunstancial, é comprometer as vantagens obtidas, pôr em perigo a cultura herdada. Eis o perigo de toda inclinação à vida mental fácil, de toda tendência ao mínimo esfôrço, caraterístico atual da maioria dos estudantes, aos quais sòmente preocupa o resultado objetivo dos exames e que não dão importância ao único que rigorosamente falando pudera ter muito valor para êles: sua cultura intelectual. Provável é que tenha razão Krisnamurti ao atribuir às universidades, e em geral às escolas, dita deficiência de critério, por considerar que umas e outras são manufaturas de profissionais, cuja única e urgente preocupação consiste em obter um título para ganhar dinheiro, em vez de tratar de obtê-lo para conseguir um grau mais alto de vida espiritual. Exatamente o mesmo afirma o Doutor Marañón em um artigo recente, referindo-se à profissão médica, ou o Doutor Pedro Bianco, ao criticar o mercantilismo profissional. A decadência da cultura começa, precisamente, por êsse orifício da inteligência. O sentido prático, o sentido dos negócios, sòmente é aplicável a estes. Transportá-lo à esfera da produção científica ou artística, ao setor intelectual da investigação e da análise é desnaturalizar em absoluto ditas funções, que são as mais elevadas a que se podem dedicar os homens.

Esta reflexão sôbre um fenômeno coletivo de nossa época, inspirador de um dos mais interessantes estudos de José Ortega e Gasset, nos tem distanciado sem querer do tema dos grandes calculadores, os que parecem ser, como os grandes xadrezistas, produto espontâneo da civilização moderna.

Com efeito: muito longe da atualidade partindo de Pitágoras,

tinham existido notabilíssimos matemáticos, entretanto o tipo de calculista mental ultra-rápido, só tem-se conhecido nos três últimos séculos e mais particularmente no atual. Fazem poucos anos que realizaram-se investigações psíquicas sérias sôbre êste tipo mental, que em qualquer parte que apareça provoca a surpresa e o desconcêrto no ânimo dos espectadores. Inaudi, Diamandi, Rückle ou Clotet tem maravilhado o mundo profano e científico, pela sua prodigiosa capacidade para o cálculo mental, que os psicólogos atribuem sempre à mesma circunstância: hipertrofia da memória. O ponto de vista anatômico, para a explicação do complicado fenômeno, é o de maior desenvolvimento de certas porções da cortiça cerebral e o da maior profundidade de determinadas circunvoluções, nos homens aos quais a natureza tem concedido o dom precioso dessa memória inverosímil.

Alguns dados objectivos a respeito da capacidade mnémica dos grandes calculistas contemporâneos, ilustrarão melhor a questão de dita espécie de memória que qualquer explicação dada adiantadamente. Segundo Dwelshauvers, para reter e repetir em qualquer ordem dez algarismos, Diamandi invertia 75 segundos; para 20 algarismos 135 segundos. Inaudi segundo Binet e Henry, praticando determinados procedimentos mnemotécnicos, inverteu 20 e 150 segundos para igual número de algarismos. Rückle, calculista e matemático alemão, cuja memória, segundo se afirma, era prodigiosa, não requeria mais de 17 segundos para reter e repetir 20 algarismos. Para reter 204 cifras, o mesmo matemático inverteu em três experiências diferentes, 16 minutos 44 segundos, 19 minutos 40 segundos e 18 minutos. Segundo Binet, Diamandi necessita 75 minutos para reter 200 algarismos e Inaudi antes (de ter perdido a memória) 45 minutos, tempos considerados pelos psicólogos extraordinàriamente breves.

Segundo Müller, Rückle é o calculista que possue maior economia de memória: aprendeu uma série de 72 algarismos em 166 segundos e a repetiu em um minuto e seis segundos sem ajuda do experimentador. Ao fim de 24 horas a reaprendeu em 50 segundos e a repetiu em quarenta, tendo no intervalo aprendido de memória 372 algarismos e um quadro de 20 consoantes.

Enquanto ao cálculo mental pròpriamente dito, Rückle tem sido também mais rápido que Inaudi. A um e outro pediram-lhes que procurassem o número entre cujas raízes quadrada e cúbica há uma diferença de 18. Inaudi achou dito número 729, em um

minuto e 57 segundos. Rückle só demorou um tempo quase incrível: dois e meio segundos. Enquanto ao famoso Dase, calculou em 52 minutos a raiz quadrada de um número de 100 algarismos.

O Engenheiro José Clotet, possue uma facilidade de memória que supera ditos antecedentes. Pode aprender 100 algarismos em 120 segundos. Como prova da continuïdade do esfôrço mental de que é capaz, baste saber que tem aprendido e repetido 3000 algarismos por dia, até completar uma série de 20000 em vários dias sucessívos. Quinze dias dedicados à aprendizagem do texto de Química inorgânica do Dr. Luanco, ex-Reitor da Universidade de Barcelona (973 páginas in quarto), permitiram-lhe citar de memória qualquer linha da obra mencionada, o que representa um verdadeiro prodígio de retentiva.

Como a maioria dos calculistas, o Engenheiro Clotet realiza qualquer classe de operações num tempo extraordinàriamente curto. Assim, por exemplo, emprega 5 segundos em elevar à quinta potência números de 2 ou três algarismos, e pouco mais em extrair raízes quadradas ou cúbicas. Uma raiz quinta composta por 7 algarismos, produto de uma operação que deixava resto, foi extraída pelo Engenheiro Clotet, perante um grupo de professores de Córdoba, no brevíssimo tempo de 12 segundos.

A memória de Rückle é visual, ao passo que Inaudi distinguia-se pela memória auditiva. Clotet parece estar bem dotado para reter séries de algarismos falados ou escritos. Sua memómia auditiva e visual parecem igualmente boas, embora que, em todo caso, a diferença entre ambas só poderá estabelecer-se mediante a devida experimentação.

Rückle carateriza-se pelo seguinte: concentração extraordinária da atenção; compreensão rapidíssima dos problemas; completa falta de fadiga; persistência assombrosa das associações numéricas e matemáticas. As imagens das operações não persistem, o que lhe permite pasar instantâneamente de um problema a outro. Aprende com maior dificuldade as séries de sílabas desprovidas de significação, que a dos algarísmos, porquanto estas últimas permitem estabelecer agrupamentos ou associações que faltam nas outras.

Inaudi, segundo Binet, distinguia-se por uma memória extraordinária dos algarismos; era, ao parecer, o único caso conhecido

de calculista não visual, quer dizer, de calculista que sòmente empregava imagens auditivas e motrizes. Sua aptidão não podia explicar-se pela influência hereditária, ou a do ambiente, pois, criado num meio extremamente pobre, manifestou antes dos oito anos uma capacidade extraordinária para o cálculo. Toda a inteligência de Inaudi foi absorvida pelos algarismos. Últimamente o grande calculista tem perdido quase por completo a memória, ficando reduzido à categoria de homem vulgar.

Clotet parece-se a Rückle, pois tem uma base científica da qual carecia Inaudi. Também não pode atribuir-se sua extraordinária memória a fatores hereditários, embora que a mesma se manifestara precocemente, quer dizer, antes de receber qualquer ensinamento escolar. Assim sendo, tanto no caso de Rückle como no de Clotet, deve atribuir-se o progresso de sua capacidade natural ao meio científico em que tem-se educado durante a sua juventude, pois que ambos provém da universidade.

Em resumo, o que carateriza o talento dos calculistas é um grupo de circunstâncias genéricas altamente desenvolvidas (atenção extraordinária, hábito matemático, capacidade não vulgar de associação) e outro de circunstâncias específicas (um interêsse enorme pelas combinações numéricas, educação apropriada, etc.).

O matemático possue, sôbre tudo isso, o dom da imaginação criadora e da análise dedutiva, quer dizer, das duas faculdades intelectuais que permitiram a Pascal reconstruir na sua infância, sem conhecimentos anteriores, os elementos essenciais da geometria de Euclides.

Dr. Francisco Valdés
Lente de Psicologia da Universidade do Litoral.
Santa-Fé, República Argentina.

Do jornal "El Litoral" — Santa-Fé
Reproduzido no semanario PAN de Buenos Aires.

INDICE

Prefácio 7
Soma 10
Subtração 16
Multiplicação 23
Multiplicação abreviada 39
Fundamento da multiplicação abreviada 40
Fundamento da multiplicação abreviada para três cifras (quadro) .... 42 A
Divisão 60
Potenciação 70
Raízes 76
Coeficientes binomiais 82
Problemas 83
O xadrez 103
Curiosidades 109
Calendário gregoriano 122
Outros calendários 137
Gracejo matemático e curiosidades 162
Advertência 168

61796

ERRATAS

À página 8, linha 21, em vez de "que o leitor" leia-se "ao leitor", e linhas 23 e 24, leia-se "ser precisas para aplicá-las ou praticál-as". À página 49, no 3.° movimento, em vez de 35 leia-se 535 e no 4.° e último movimento em vez de 535, leia-se 5535.

À página 108 houve uma transposição de 2 linhas, devendo ler-se a linha 9 antes da linha 8. À página 122 à linha 18 em vez de "agregando cada cada quatro anos", leia-se "agregando também a cada quatro anos"; à linha 19 em vez de "que se chamou bissexto" leia-se "que se chamou igualmente bissexto"; e à linha 34 por um descuido de composição, após 8000, leia-se (alguns autores assinalam incluso o ano 4000; segundo nossos cálculos, em vez dêstes, serão os anos 5400 e 8600).